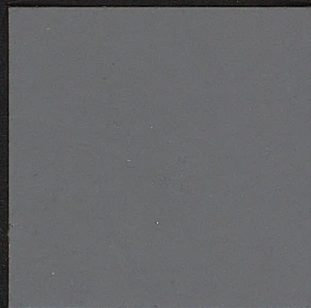
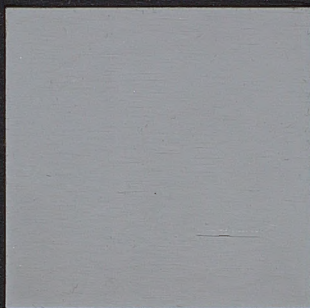
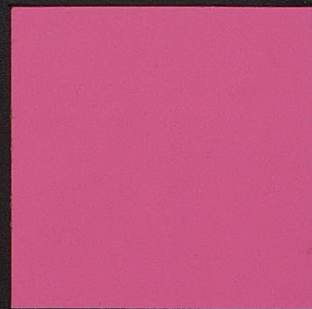
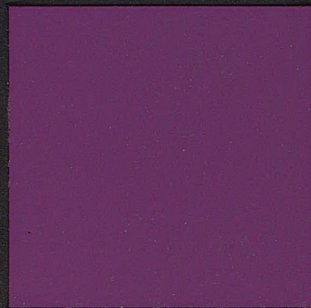
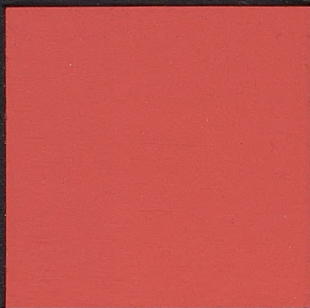
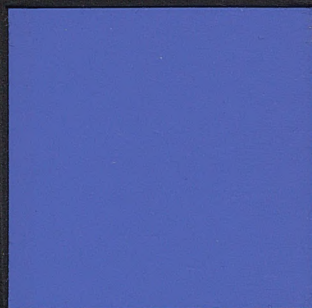
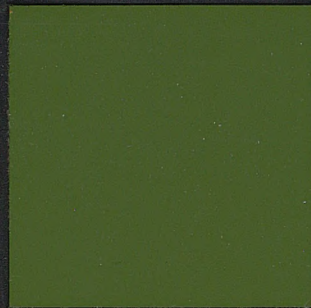
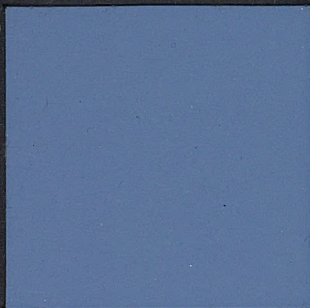
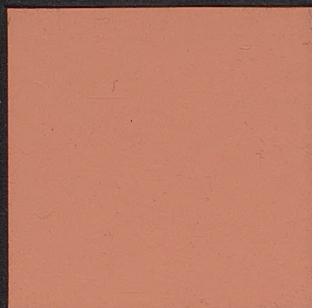


colorchecker CLASSIC

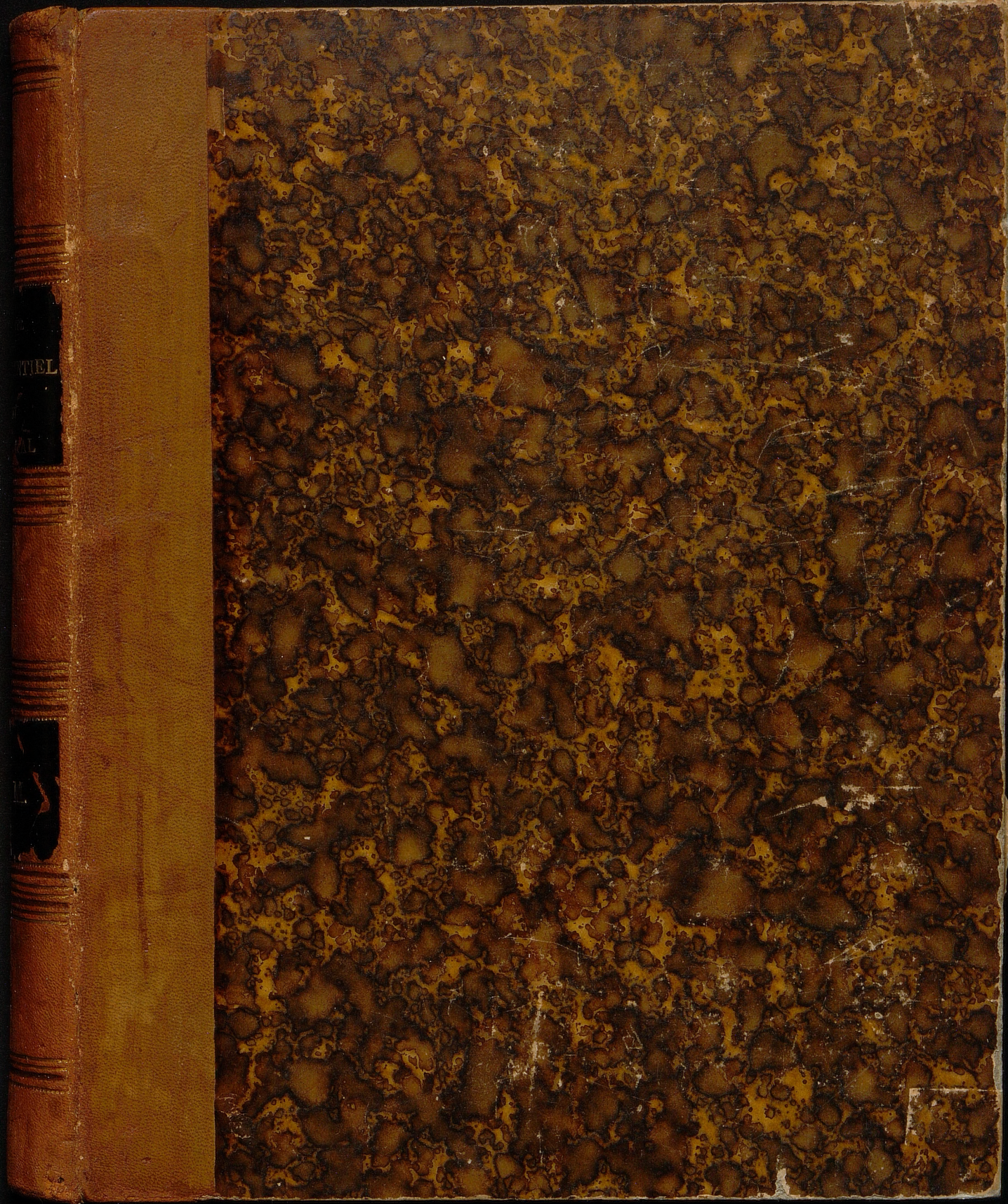


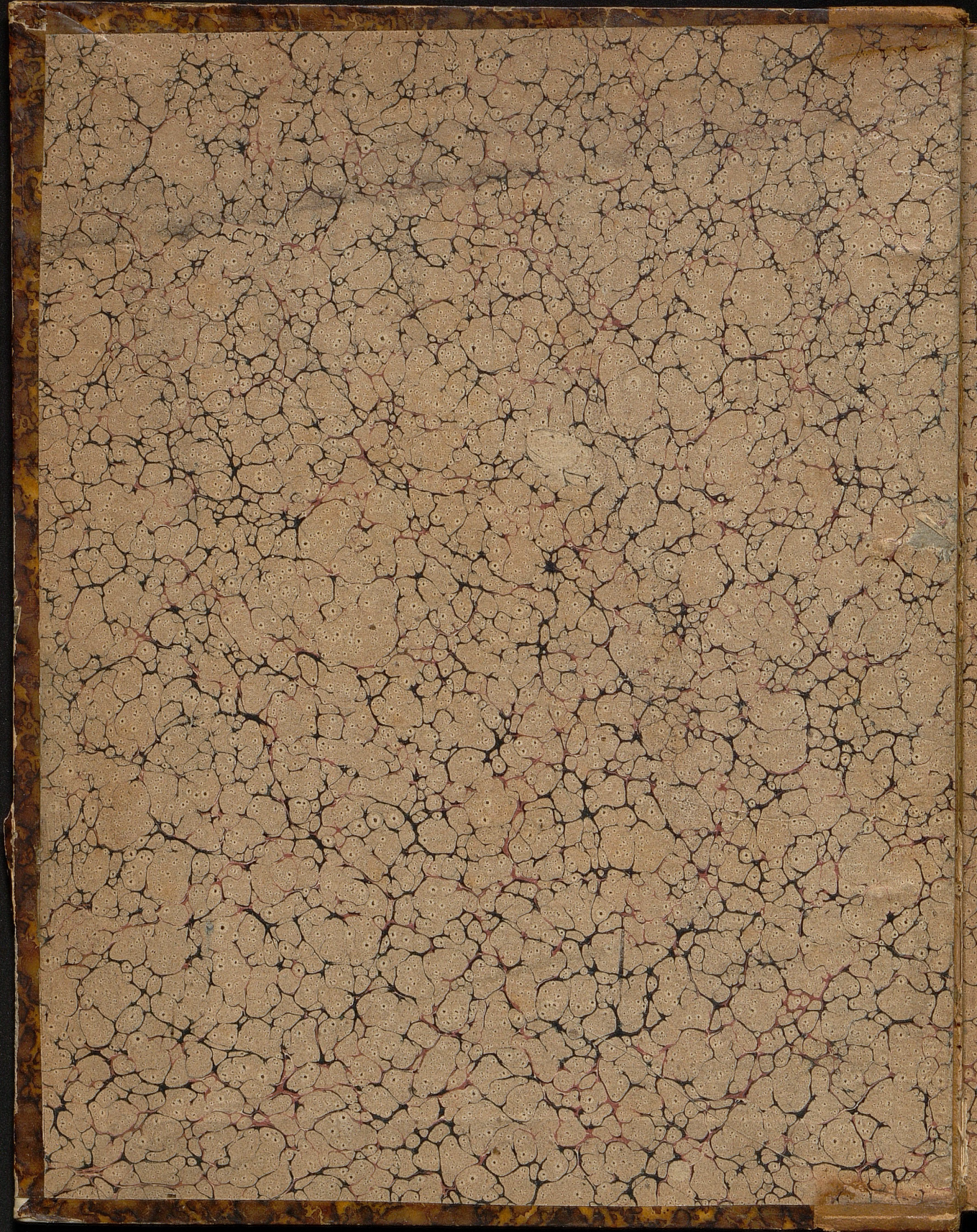
x-rite

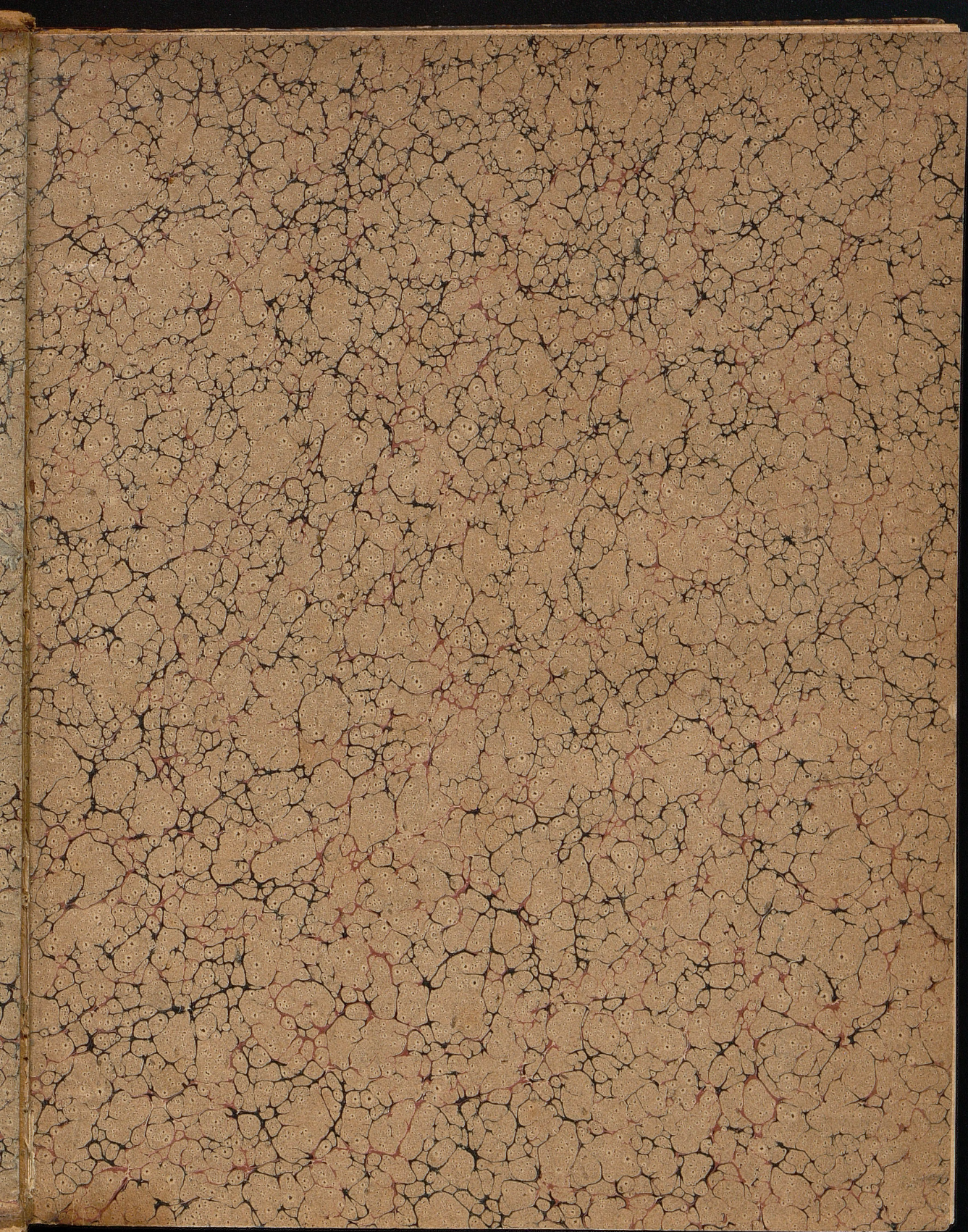
mm

CALCUL
DIFFÉRENTIEL
ET
INTÉGRAL

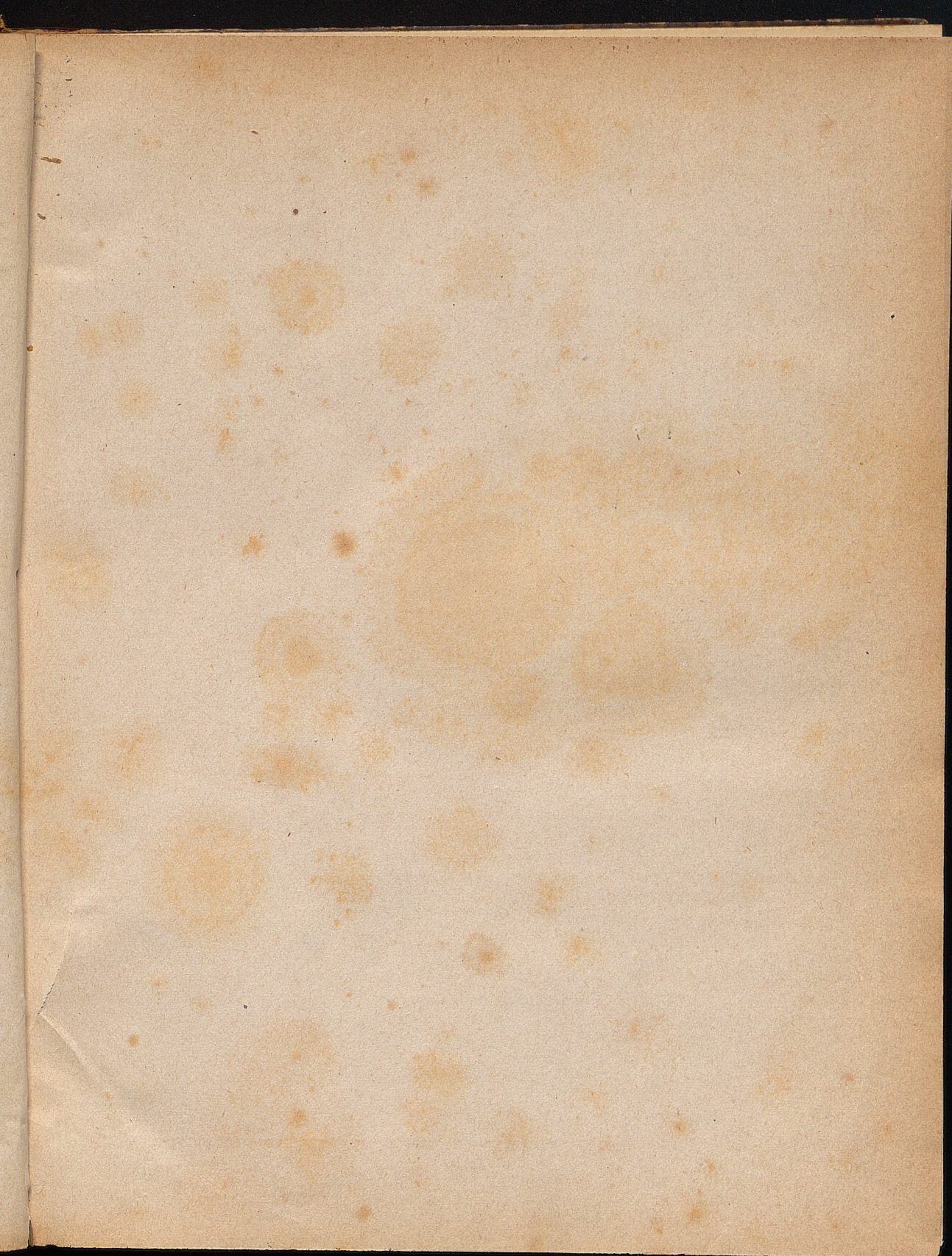
E. M.

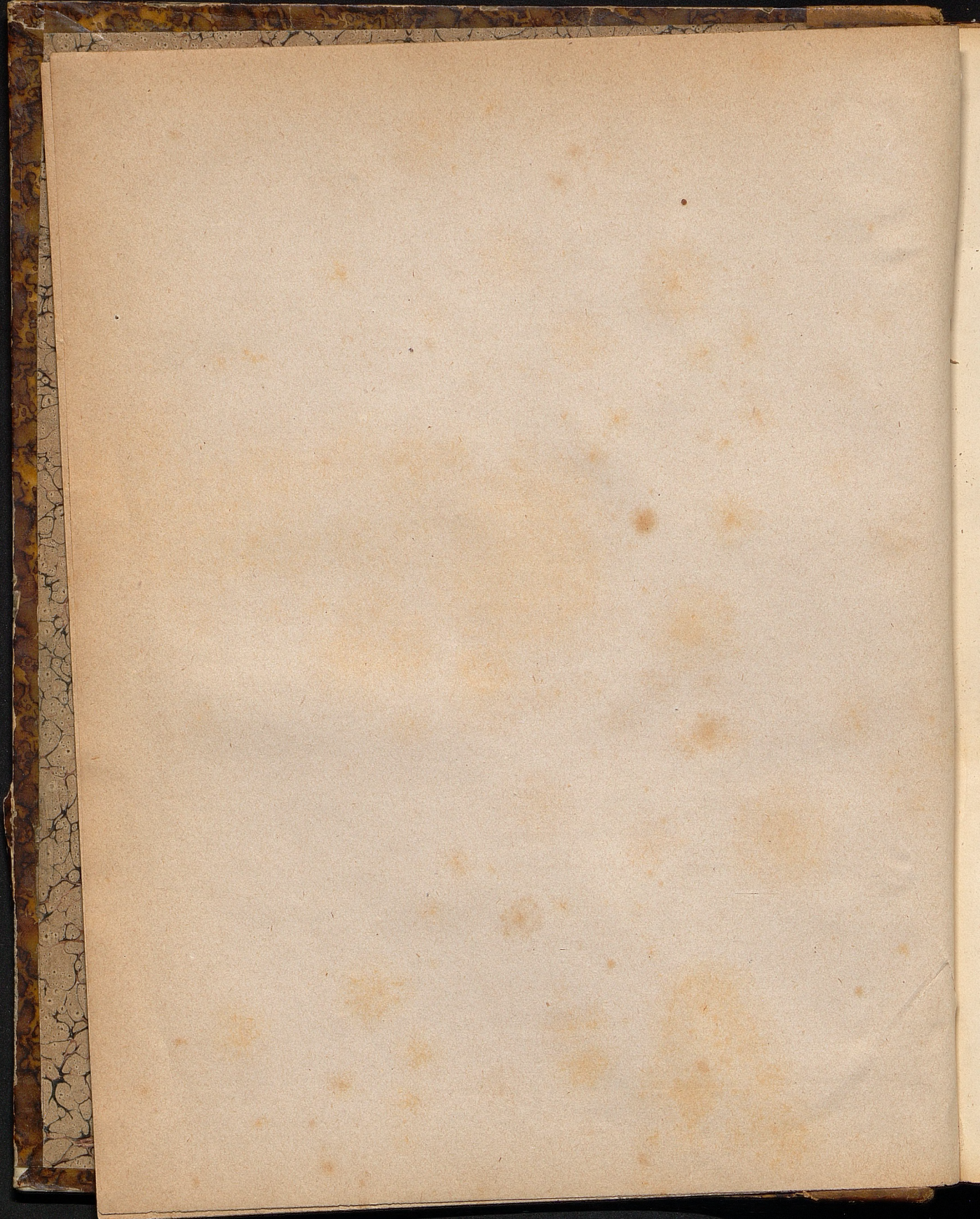


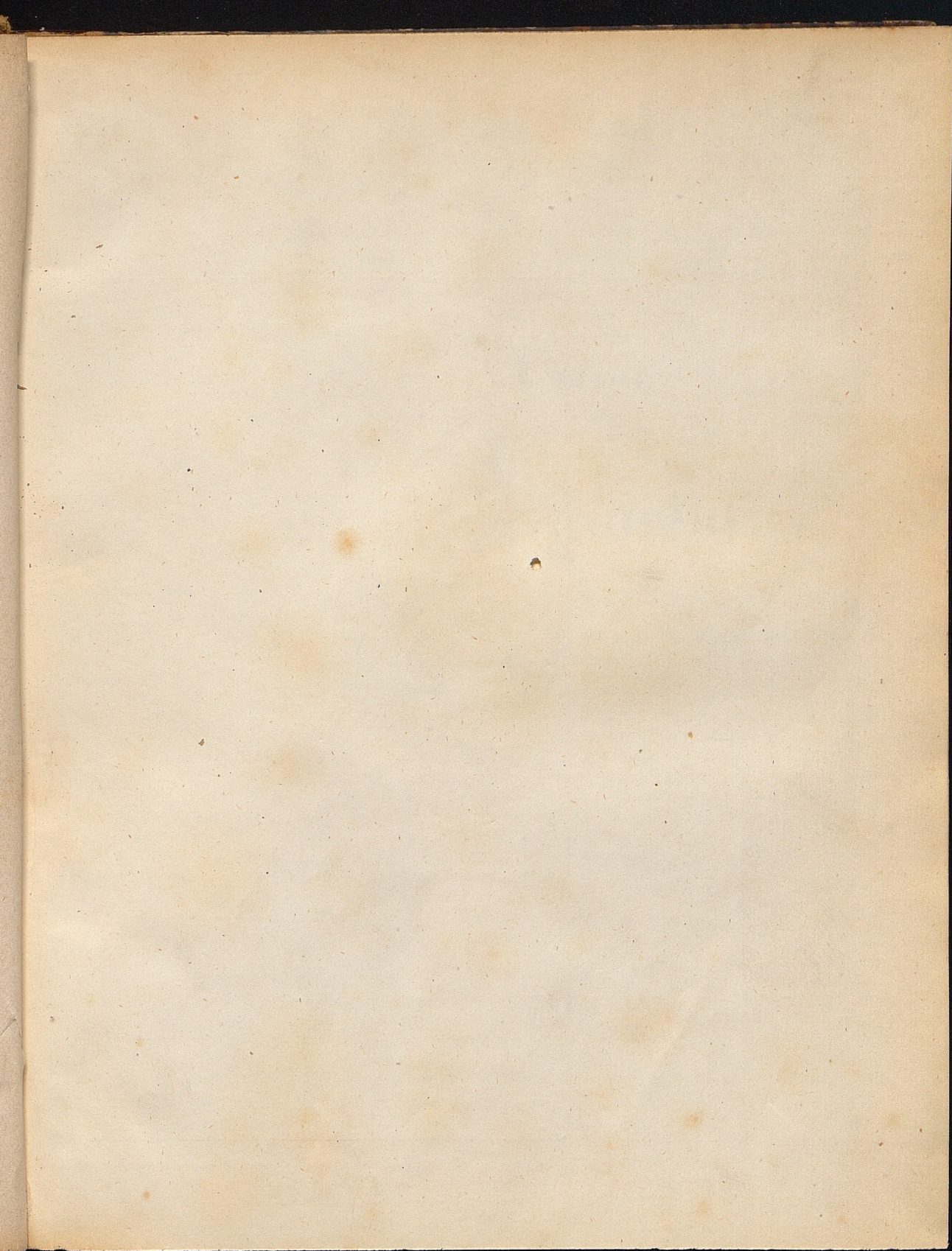


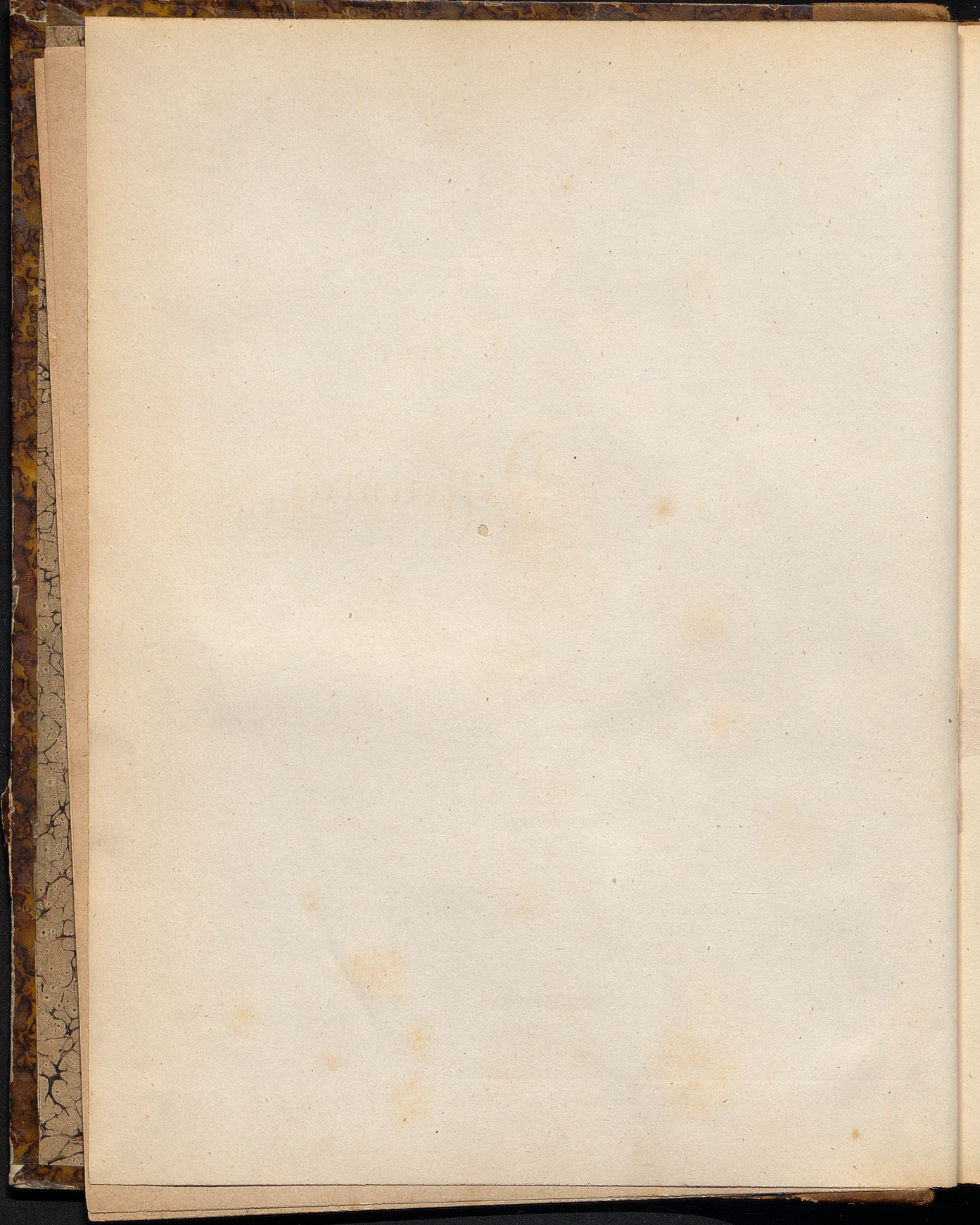


Ms 208









Calcul
Différentiel.

Ecole Normale, 1848-1849.

M. E. Mouton.



Handwritten text, possibly a title or signature, in a cursive script.

Ms 208

Notions Préliminaires.

Deux sortes de Quantités se présentent dans l'analyse :
les quantités Constantes et les Quantités Variables.

Si deux variables sont liées entre elles par une relation telle
l'une recevant un accroissement, l'autre éprouve un changement
d'état correspondant, on dit que ces deux quantités sont
fonction l'une de l'autre. — De ces deux quantités, celle qu'on
regarde spécialement comme recevant les accroissements arbit-
raires s'appelle la Variable Indépendante, l'autre, dont
la variation dépend ainsi de celle de la première, s'appelle
absolument la fonction.

Une fonction peut dépendre d'une ou de plusieurs variables
indépendantes : Ex. 1^{re} eq. d'une courbe $y = f(x)$

" " " Surface $z = f(x, y)$

Remarquons que, dans ces définitions, rien n'indique
qu'on sache exprimer au moyen de lignes algébriques la
relation constante qui unit les deux variables. ainsi, l'as-
sinité de la vapeur d'eau est une fonction de la tempéra-
ture, le longeur de la circonférence est une fonction du
rayon, bien qu'on ne connaisse pas exactement ces fonc-
tions : on les a seulement déterminées approximativement.
Cela pourrait induire à distinguer les fonctions analytiques
des fonctions empiriques.

Les premières, les seules qui nous occupent, se séparent
elles-mêmes en Fonctions Explicites et fonctions Implicites.

on distingue encore les Fonctions algébriques et les
fonctions transcendentes.

Il y a encore des Fonctions de Fonctions:

$$y = \text{Log Sin.} (f(x))^x$$

De la Continuité.

Une fonction est dite Continue entre deux limites a et b
lorsque chaque valeur intermédiaire de x , & par ex., donne pour
la fonction $f(x)$ une valeur $f(x)$ réelle et finie, et qu'en
outre, si l'on donne à x un accroissement h , la Diffé-
rence entre les deux états de la fonction, ou son accroissement
 $f(x+h) - f(x)$ converge vers zéro avec h .

Une fonction est Discontinue dans le cas contraire.

ainsi les fonctions $y = \text{Tg } x$, $y = \text{Log } x$ sont discontinues
parce que, pour certaines valeurs de x , elles deviennent
Infinies ou Imaginaires.

L'autre sorte de Discontinuité est plus rare: elle se rencon-
tre alors que la fonction passe brusquement d'un état
à un autre, tout en restant finie et réelle: par ex.

$$y = \frac{1}{1 + e^{\text{Tg } x}}$$

passant brusquement de 0 à 1 quand x , croissant, atteint
& dépasse la valeur $\frac{\pi}{2}$.

On voit, en général, les fonctions discontinues ne l'être
que pour certaines valeurs particulières de la variable indé-
pendante.

Il y en a pourtant qui le sont dans toute l'étendue
de leur cours, par ex. celle-ci

$$y = (-2)^x$$

Si j'écris $x = \frac{2n+1}{2p}$, y est Imaginaire, et, pour
 $x = \frac{2p}{2n+1}$, y est Réel. on voit donc ici que, entre deux
 valeurs très-rapprochées de x qui donnent y réel, on peut
 toujours trouver une infinité de valeurs de x pour lesquelles
 y est Imaginaire.

Bien qu'il n'y ait pas d'accroissements variables pour
 les fonctions Imaginaires, il arrivera qu'on considère des func-
 tions de la forme

$$y = f(x) + \sqrt{-1} \, q(x)$$

et qu'on parle de leur continuité. - Une pareille fonction est
 dite continue quand les deux fonctions réelles $f(x)$ et $q(x)$,
 le sont elles-mêmes.

Des Limites et des Infinités petits.

on appelle limite d'une quantité variable, une
 grandeur fixe dont la variable s'approche indéfiniment,
 de telle sorte que la différence peut devenir plus petite que
 toute grandeur assignable, sans cependant jamais être
 nulle.

on sait que

Si deux quantités variables sont constamment égales en
 s'approchant de leurs limites, ces limites sont les mêmes ;

Si deux quantités variables sont constamment égales
 dans tous leurs états de grandeur, et qu'une d'elles ait
 une limite, l'autre a la même limite.

En Général :

Soient $F(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$ deux fonctions toujours égales pour toutes les valeurs des variables x, y, z , et nous savons qu'on a toujours $F(x, y, z) = f(x, y, z)$, et supposons que ces variables prennent simultanément vers de certaines valeurs limites $a, b, \dots c$: il s'agit de quel'on a

$$F(a, b, \dots c) = f(a, b, \dots c)$$

En effet, F et f , étant des fonctions continues, prendront des accroissements aussi petits qu'on voudra pour des accroissements extrêmement petits des variables. Si donc on conçoit que ces variables prennent des valeurs se rapprochant de plus en plus des limites $a, b, \dots c$, les fonctions elles-mêmes diffèrent de moins en moins des valeurs $F(a, b, \dots c)$, $f(a, b, \dots c)$, et en diffèrent d'autant plus qu'on le voudra ; de façon que ces valeurs soient leurs limites respectives. D'ailleurs, quelque près qu'elles soient de ces limites, ces fonctions sont toujours égales entre elles : donc leurs limites le sont également, et $F(a, b, \dots c) = f(a, b, \dots c)$ c. q. d.

Telle est la proposition fondamentale de la Théorie des Limites, qui consiste elle-même à remplacer les Quantités dont on veut trouver la Relation par d'autres plus simples, variables, et s'approchant indéfiniment des premières. On cherche la Relation qui unit ces quantités auxiliaires, et, quand on l'a trouvée, il suffit d'y remplacer chacune des variables par sa limite.

Un Infinitement petit est une quantité variable qui a zéro pour limite, et qu'on considère dans le voisinage de cette limite. Un Infinitement petit n'a donc jamais de grandeur fixe : c'est essentiellement une quantité variable.

Commençons par établir quelques principes généraux sur les infinitésimaux.

Un infiniment petit peut avoir avec un autre tel rapport que l'on veut. Ce rapport peut être fixe ou variable, peut même être infiniment petit ou infiniment grand.

Soient a et b deux infiniment petits. Quand la limite du rapport $\frac{a}{b}$ est finie, on dit que les deux infiniment petits sont du même ordre.

Si $\lim. \frac{a}{b} = 0$, alors b est dit infiniment petit par rapport à a : c'est ce qu'on appelle un infiniment petit du second ordre. — ainsi, si l'on considère un arc infiniment petit AB et sa corde, cette corde est aussi infiniment petite, de même que le sinus versé AP . Mais AP est du 2^e. ordre, car

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AK}$$

ou

$$\frac{\text{Sinus Versé}}{\text{Corde}} = \frac{\text{Corde}}{\text{Diamètre}}$$

Donc

$$\lim. \frac{\text{Sinus Versé}}{\text{Corde}} = 0$$

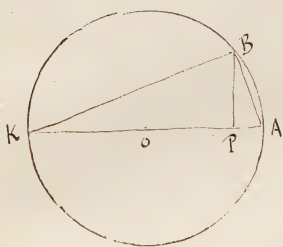
et le sinus versé est infiniment petit par rapport à la corde.

En général, si l'on considère plusieurs infiniment petits a, b, c, d, \dots tels que, l'un d'eux étant une fois fixé, tous les autres s'ensuivent; si l'on a $\lim. \frac{b}{a} = 0$, b est un infim. petit du 2^e. ordre; si $\lim. \frac{c}{b} = 0$, c est un inf. pet. du 3^e. ordre, ... etc. :

Un infiniment petit d'ordre n est une quantité telle que son rapport à un infiniment petit d'ordre $n-1$ a pour limite zéro.

Si nous représentons par Δ un infiniment petit du premier ordre, et par A une quantité finie, l'expression

$$A \Delta (1 \pm \epsilon)$$



6.

représente le type le plus Général d'un Inf. petit d'un m^{em} ordre, & ayant zéro pour Limite.

Soit maintenant x le type d'un Infinitement petit du 1^{er} ordre. on doit avoir

$$\frac{x}{a} = A a (1 \pm \varepsilon)$$

Où

$$x = A a^2 (1 \pm \varepsilon)$$

De même, le type Général d'un Infinitement petit d'ordre n sera

$$A a^n (1 \pm \varepsilon)$$

Si l'on considère une somme d'Infinitement petits

$$A a^n (1 \pm \varepsilon) + B a^p (1 \pm \eta) + C a^q (1 \pm \gamma) + \dots$$

$n < p < q \dots$ La somme de ces Infinitement petits est elle-même un Infinitement petit d'ordre le moins élevé n .

En effet, cette somme peut s'écrire :

$$A a^n \left\{ 1 \pm \varepsilon + \frac{B}{A} a^{p-n} (1 \pm \eta) + \frac{C}{A} a^{q-n} (1 \pm \gamma) + \dots \right\}$$

ou

$$A a^n (1 \pm \delta)$$

δ ayant zéro pour Limite.

Le théorème. - Lorsque deux quantités a, b , sont Infinitement petites, & que $\lim \frac{b}{a} = 1$, leur Différence est Infinitement petite par rapport à chacune d'elles.

En effet, posons

$$a = b + \delta$$

et Divisons par a ; il vient

$$1 = \frac{b}{a} + \frac{\delta}{a}$$

Où

$$1 = \lim \frac{b}{a} + \lim \frac{\delta}{a}$$

$$\lim \frac{\delta}{a} = 0$$

Donc δ est Infinit. petit par rapport à a , & l'on

Démontrerait de même qu'il l'est aussi par rapport à b .

Réciproquement, si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à chacune d'elles, la limite de leur rapport est l'Unité.
même démonstration.

Théorème. — La limite du rapport de deux infiniment petits a et b n'est pas changée si l'on remplace chacune d'eux par une quantité qui n'en diffère que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.

Soient a' et b' deux quantités qui ne diffèrent de a et de b que d'un infiniment petit d'un ordre supérieur à a et b . Je dis que

$$\lim \frac{a'}{b'} = \lim \frac{a}{b}$$

En effet, on a par hypothèse

$$\lim \frac{a'}{a} = 1 \quad \lim \frac{b'}{b} = 1$$

Il est prouvé, on a identiquement

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'}{a} \cdot \frac{b}{b'}$$

Donc

$$\lim \frac{b}{a} = \lim \frac{b'}{a'} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il suit de là que, dans toute question où l'on n'aura pour but que de considérer le rapport de b à a , il sera toujours permis de remplacer chacune de ces quantités par une autre dont le rapport avec la première ait la même limite.

Théorème. — Je considère une suite d'infiniment petits positifs

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

dont le nombre m augmente indéfiniment. Cette somme tendra en général vers une limite finie. Cette limite ne sera pas changée si l'on remplace chacune de ces quantités respectivement par une autre,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m$$

Ces nouvelles quantités ne diffèrent, des précédentes que par des infiniment petits d'ordres supérieurs.

En effet, on aura alors

$$\lim \frac{a_1}{b_1} = 1$$

$$\lim \frac{a_2}{b_2} = 1$$

$$\lim \frac{a_m}{b_m} = 1$$

Convenons que tous ces rapports soient rangés par ordre de grandeur croissante, de façon que l'on ait

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3} < \dots < \frac{a_m}{b_m}$$

on voit que

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} < \frac{a_m}{b_m}$$

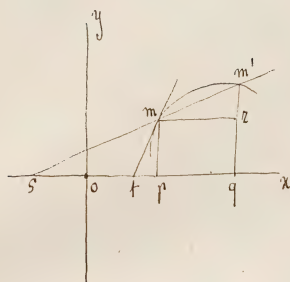
Cela a encore lieu à la limite. Donc

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = 1$$

Donc, si le Numérateur a une limite, le Dénominateur en a aussi une, qui est la même.

C'est sur ces principes que repose la Méthode Infinitésimale, qui abrège et simplifie beaucoup le Calcul Différentiel.

Origine et but du Calcul Différentiel.



C'est dans la Recherche Des Tangentes aux Courbes planes que le Calcul Différentiel a pris son origine. — Si l'on considère un point m d'une courbe, un point m' infiniment voisin, et qu'on mène une sécante mm' , lorsque m' se rapproche indéfiniment de m , la sécante mm' devient indifféremment soit la tangente mt . Le coefficient angulaire de la tangente n'est donc autre chose que la limite de celui de la sécante, lequel est $\frac{m'r}{mr}$, c.à.d. le rapport de l'accroissement de l'ordonnée à celui de l'abscisse. Si donc l'Eq. est $y = f(x)$, et si l'accroissement infiniment petit mr de l'abscisse, on a

$$\frac{m'r}{mr} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donc le coefficient angulaire de la tangente n'est autre chose que la limite de ce dernier rapport. Si donc nous savons en général trouver cette limite, à l'instant même le problème des Tangentes sera résolu. — ainsi voilà comment on a été amené à chercher des méthodes générales pour trouver la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction quelconque à celui de la Variable, lorsque celui-ci converge vers zéro.

La Recherche de cette limite est le premier objet du calcul Différentiel.

Cette limite, on voit déjà la trouver dans divers cas, dans celui des fonctions algébriques, par exemple. alors en effet, la limite du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ n'est autre chose que la Dérivée de $f(x)$. — Ind.

pendamment Des fonctions algébriques, on sait encore le faire dans quelques cas particuliers: ainsi on sait que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

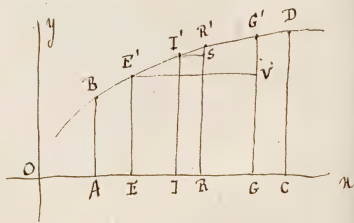
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{etc.}$$

Ici, une question se présente. Dans les exemples précédents, cette limite est finie. Mais en est-il toujours de même?

Il est facile de voir qu'il en est ainsi, dans quelques cas très-particuliers. - D'abord, si nous nous reportons à la figure précédente, nous voyons que cette limite est précisément le coefficient angulaire de la tangente en m , c'est $\frac{mp}{pt}$, ou $\frac{\text{ordonnée}}{\text{sous-tangente}}$: valeurs qui, évidemment, sont généralement finies. - D'ailleurs, on peut le démontrer a priori:

Soit en effet $y = f(x)$. Si h est l'accroissement infiniment petit de x , K l'accroissement correspondant de y , ou $f(x+h) - f(x)$, je dis que $\lim \frac{K}{h}$ est une quantité finie. - Pour cela, j'en ai démontré qu'elle ne peut être ni constamment nulle ni constamment infinie. - En effet, nous pouvons toujours considérer $y = f(x)$ comme représentant l'ordonnée d'une courbe dont x serait l'abscisse. - Je dis d'abord que $\lim \frac{K}{h}$ n'est pas constamment nulle pour les valeurs de x comprises entre les limites $OA = a$ et $OC = b$; à moins que y ne soit indépendant de x , ce qui est contre l'hypothèse. - En effet, considérons deux abscisses intermédiaires



quelconques, $OE = x_1$, et $OG = x_2$, et appelons y_1 , et y_2 les ordonnées correspondantes. Considérons qu'on partage l'intervalle $x_2 - x_1$, en un très grand nombre de parties égales, dont chacune, telle que IR , sera désignée par h . Lorsque, sur la courbe, nous passerons de I à R , l'ordonnée reçoit un accroissement correspondant que j'appelle K . Cet accroissement est variable de E' à G' , et il peut même changer de signe. Mais, quoi qu'il en soit, il est évident que si l'on fait la somme algébrique de tous ces accroissements de l'ordonnée, cette somme sera la différence, positive ou négative, des ordonnées extrêmes, différence qui est si $G'V$, et que je désigne par $y_2 - y_1$. — Cela posé, admettons que $\frac{K}{h}$ ait constamment zéro pour limite entre les points E et G : je puis toujours, par conséquent, prendre h assez petit pour que K ait une valeur numérique plus petite que $h\varepsilon$, ε étant une quantité fixe, mais qui peut d'ailleurs être prise aussi petite qu'on le veut. Or, la somme des valeurs numériques de K , ou $\sum K$, en allant de x_1 à x_2 , sera plus petite que $\varepsilon \sum h$, c'est-à-dire.

$$\sum K < \varepsilon (x_2 - x_1).$$

et à fortiori

$$y_2 - y_1 < \varepsilon (x_2 - x_1)$$

inégalité impossible à moins que $y_2 - y_1$ ne soit rigoureusement nul. Donc alors l'ordonnée n'aurait pas varié de E' à G' , qui sont deux points quelconques de la courbe intermédiaires entre B et D . Donc, entre B et D toutes les ordonnées seraient les mêmes, ce qui est absurde: donc l'ord. K n'est pas constamment nulle. — Mais il faut ^h qu'elle n'est pas non plus toujours infinie: car,

pour cela, il faudrait que, en renversant, $\lim \frac{h}{x}$ fût constamment nulle, ce qu'on démontrerait impossible en posant $x = \varphi(y)$.

Donc, en général, $\lim \frac{h}{x}$ a une valeur finie, qu'il y a lieu de chercher.

C'est là l'objet que nous nous proposons.

Définitions et Notations.

Représentons toujours par

$$y = f(x)$$

une fonction quelconque de x . - on a appelé Dérivée la limite du Rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Nous la désignons souvent par $f'(x)$, de sorte que nous avons, par définition

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Et donc nous supposons que h ne soit pas nul, mais soit très-voisin de zéro, nous aurons, ε décroissant indéfiniment avec h , l'égalité

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$$

Où

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h \varepsilon$$

Donc l'accroissement de x se compose de deux parties: la première, $h f'(x)$, est telle que son rapport à h est une quantité finie, indépendante de h , et qui s'appelle la Dérivée. Cette première partie $h f'(x)$ a reçu le nom de Différentielle de la fonction y . - la seconde partie, $h \varepsilon$, se distingue de l'autre en ce que

son rapport à h dépend de h lui-même, et a pour limite zéro: elle n'a pas de valeur particulière.

Pour désigner d'une manière abrégée la différentielle de y , on s'écrit dy . Donc, par définition,

$$(1) \quad dy = h f'(x)$$

Donc, la différentielle d'une fonction est le produit de sa dérivée par l'accroissement de la variable.

Il suit de là que la différentielle de x est h . Car, x étant en même temps fonction et variable, on a

$$dx = h \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = h.$$

L'équation (1) peut donc encore s'écrire

$$dy = f'(x) dx$$

D'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

telle est donc, par suite de nos définitions, la notation différentielle de la dérivée. On voit ainsi que

la dérivée d'une fonction est égale au quotient de la différentielle de cette fonction par la différentielle de la variable.

On représente assez souvent par Δy l'accroissement complet d'une fonction. Nous aurons donc

$$\Delta y = h f'(x) + h\epsilon$$

tandis que

$$dy = h f'(x)$$

la limite de $\frac{\Delta y}{dy}$ est évidemment l'unité: car il ne diffère que d'un infiniment petit du second ordre.

C'est pour cela qu'on dit souvent que dy est l'accroissement infiniment petit de la fonction y : et en effet, on ne peut s'écarter ainsi que d'un infin. petit du 2^e ordre $h\epsilon$,

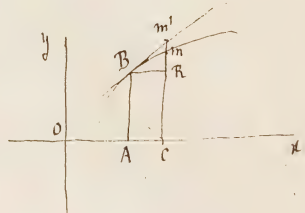
ce qui est rigoureusement permis toutes les fois qu'on ne considère que des limites de rapports ou des limites de sommes dont les termes, augmentant sans cesse de nombre, diminuent indéfiniment de grandeur. Or ce sont ces deux seuls cas qu'on examine dans le calcul différentiel.

Lorsqu'il s'agit de x , on a $dx = \Delta x$.

Il est facile d'interpréter géométriquement dy et Δy .

En effet, si $OA = x$, $AB = y$, $AC = h$, il est évident que $mR = \Delta y$; de plus $m'R = dy$. Car le triangle rectangle BRm' donne

$$m'R = BR \operatorname{tg} B = h f'(x) = dy.$$



Avant de passer à la Recherche des Règles propres à Trouver les Dérivées des diverses fonctions, il est bon de signaler une propriété importante de ces dérivées elles-mêmes. À l'inspection de la Dérivée d'une fonction, on peut reconnaître si cette fonction est croissante ou décroissante quand x croît aux environs d'une certaine valeur.

En effet, imaginons que l'on reprenne l'expression

$$f(x+h) - f(x) = h \{ f'(x) + \varepsilon \}$$

et que l'on sache que, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites a et b , la dérivée $f'(x)$ est positive: je dis qu'entre ces mêmes limites, c'est-à-dire quand x croît passant par a pour aller d'une manière continue jusqu'à b , la fonction $f(x)$ croît en même temps que x . - Pour le démontrer, j' suppose que je donne à x une valeur quelconque comprise entre a et b : $f'(x)$ sera > 0 . Maintenant, je puis toujours prendre h assez petit pour que l'on ait, en valeur absolue,

$f'(x) > \varepsilon$. alors, comme $h > 0$, on aura toujours
 $h \{ f'(x) + \varepsilon \} > 0$ et par suite $f(x+h) > f(x)$. Donc
 la fonction est croissante.

Le même raisonnement démontrerait que, si la dérivée
 était négative, la fonction décroîtrait.

on pourrait ici demander: Qu'arriverait-il si, pour
 certaines valeurs de x , $f'(x)$ s'annulait, en restant > 0
 pour toutes les autres valeurs? Le raisonnement précédent
 paraît ne plus subsister, et alors en effet, il y a qq. mots
 à y ajouter. — au lieu de la fonction $f(x)$, considérons
 la fonction $f(x) + gx$, g étant un nombre fixe, posi-
 tif, mais qui peut d'ailleurs être pris aussi faible qu'on
 le veut. — La dérivée de cette nouvelle fonction sera $f'(x) + g$.
 Mais cette dérivée reste dans le cas précédent: elle est
 constamment positive. Donc la fonction croissante et
 toujours croissante, et l'on a

$$f(x+h) + g(x+h) - f(x) - gx > 0$$

ce qui se réduit à

$$f(x+h) - f(x) + gh > 0$$

Pour inégalité démontrer que la fonction $f(x)$ ne peut
 décroître. car, si c'était possible, on pourrait poser
 $f(x+h) - f(x) = -\delta$, et il resterait $-\delta + gh > 0$, et gh
 pourrait être pris assez petit pour que cette dernière iné-
 galité fût absurde. Donc $f(x)$ ne décroît pas. Donc

Le théorème. Quand la dérivée d'une fonction est
 constamment positive, et passe même par zéro, la fonc-
 tion est croissante; — quand elle est constamment négative,
 la fonction est décroissante.

Le réciproque étant évident. Vrais, on peut dire:

Le théorème. Si une fonction est toujours { croissante
 entre deux limites a et b , sa dérivée est

jamais { négative
positive

entre ces mêmes limites.

Dérivées Des Fonctions algébriques.

Nous désignerons par

$$u, v, w, \dots$$

Des fonctions De la forme

$$f(x), g(x), \psi(x) \dots$$

1°. Fonctions additives ou soustractives.

Proposons-nous De trouver la dérivée De la fonction

$$y = u + v - w$$

Je change x en $x + \Delta x$. J'appellerai $\Delta y, \Delta u, \Delta v, \Delta w$ les accroissements correspondants Des fonctions y, u, v, w . J'aurai

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

cette égalité est toujours vraie quelque petit que soit Δx .
Donc elle se vérifiera encore quand on prendra les limites Des deux membres, et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

ou, en multipliant par dx

$$dy = du + dv - dw$$

ce qui démontre que la différentielle D'une somme algébrique De plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique Des différentielles De ces fonctions, et que la même règle s'applique à leurs dérivées.

2°. Fonctions Produit.

Prenons d'abord le cas De deux facteurs.

Soit la fonction

$$y = uv$$

Je change x en $x + \Delta x$. J'aurai

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$$

Où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$$

Passant à la limite, on aura

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

ou

$$dy = u dv + v du$$

Ceci montre que la différentielle d'un produit de deux fonctions est égale à la somme des produits de chaque fonction par la différentielle de l'autre.

Ce résultat comprend celui où u est égal à une constante et. alors, du étant nul, on a

$$y = av$$

$$dy = a dv$$

En rapprochant ce résultat de la formule générale, on voit que pour avoir la différentielle d'un produit de deux fonctions, il suffit de faire la somme des résultats obtenus en supposant que successivement chaque fonction soit constante, et l'autre seule variable.

Rem. Cette observation, qui se généralisera bientôt, s'applique évidemment au cas des fonctions additives.

Remarquons encore que, si $a = -1$, on a

$$d(-v) = -dv$$

c.à. q. si une fonction change de signe, il en est de même de la différentielle.

Enfin, observons que la formule Générale

$$d(uv) = u dv + v du$$

peut se mettre sous cette forme

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

ce qui montre que le Rapport De la Différentielle D'un produit De Deux facteurs, à ce produit, est égal à la Somme Des Rapports Des Différentielles De chaque facteur à ce facteur.

Je dis maintenant que cette Dernière règle est Générale, quel que soit le nombre Des facteurs.

En effet, on a D'après le cas précédent

$$\frac{d(uvw)}{uvw} = \frac{d(uv.w)}{uv.w} = \frac{d(uv)}{uv} + \frac{dw}{w} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$$

Ainsi, Du cas De 3 facteurs, on passerait facilement à celui De 4, et ainsi De suite. Donc en Général :

$$\frac{d(uv\dots w)}{uv\dots w} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \dots + \frac{dw}{w}$$

ou bien encore

$$d(uv\dots w) = v\dots w du + u\dots w dv + \dots + uv\dots dw$$

ce qui est facile à démontrer en langage ordinaire.

3°. Fonctions Quotient.

Soit

$$y = \frac{u}{v}$$

Donc

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

et, en Divisant par Δu ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Dans le cas particulier où $u = a$, on aurait

$$d\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{a dv}{v^2}$$

Si au contraire $v = a$

$$d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} du$$

On voit encore que dy est la somme de ces deux résultats.

Rem. dy aurait pu se trouver en partant de la différentielle d'un produit.

$$y = \frac{u}{v}$$

$$u = vy$$

$$du = v dy + y dv$$

$$dy = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

4°. Puissances.

Soit

$$y = u^m$$

m étant entier et positif. Alors

$$u^m = u \cdot u \cdot u \cdots u$$

Donc

$$\frac{d u^m}{u^m} = \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \cdots + \frac{du}{u}$$

$$d. u^m = m u^{m-1} du$$

Soit effectivement $m = \frac{p}{q}$. Nous aurons

$$y = u^{\frac{p}{q}}$$

ou

$$y^q = u^p$$

On a

$$q y^{q-1} dy = p u^{p-1} du$$

$$dy = \frac{p}{q} \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} du$$

or $y = u^{\frac{p}{q}}$. Donc $y^{q-1} = u^{\frac{p}{q}(q-1)} = u^{p-\frac{p}{q}}$. Donc

$$dy = \frac{p}{q} u^{p-1-\frac{p}{q}} du$$

$$dy = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} du$$

c'est encore la même Règle.

Cette dernière formule, écrite avec des Radicaux, devient

$$d\{(\sqrt[q]{u})^p\} = \frac{p}{q} (\sqrt[q]{u})^{p-q} du$$

forme qui montre que les deux membres ont un même nombre de déterminations algébriques.

Si l'on applique cette règle au cas d'un Radical carré, on a $m = \frac{1}{2}$. Donc

$$d(\sqrt{u}) = d(u^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

et pour la Dérivée

$$\frac{d(\sqrt{u})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

Ainsi cette dernière formule, si l'on fait $u=x$, il reste

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

théorème déjà connu, et d'après lequel on voit que la

formule $\frac{d(\sqrt{u})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}$ peut s'énoncer ainsi :

Pour avoir la dérivée d'un radical carré portant sur une fonction de x , il suffit de prendre la dérivée de ce radical en regardant la fonction comme une variable indépendante, pourvu que l'on multiplie ensuite par la dérivée de cette fonction elle-même considérée alors comme $f(x)$; -

résultat remarquable, et que nous verrons se généraliser.

Prevenons enfin le cas des puissances négatives.

$$y = u^{-m}$$

m étant d'ailleurs quelconque, on peut écrire

$$y = \frac{1}{u^m}$$

Donc

$$dy = - \frac{m u^{m-1} du}{u^m}$$

$$d(u^{-m}) = -m u^{-m-1} du$$

Ce qui montre que la règle trouvée plus haut est complètement générale. - Il est vrai que l'on n'a considéré que des exposants commensurables : mais comme alors elle est toujours vraie, la méthode des limites montrerait facilement qu'elle se vérifie pour les exposants incommensurables.

Telles sont les règles à suivre pour la différentiation des fonctions algébriques quelconques.

avant de passer aux fonctions transcendentes, nous allons généraliser deux résultats qui se sont déjà présentés.

Des Fonctions De Fonctions.

Supposons que l'on ait

$$\left. \begin{array}{l} y = f(u) \\ \text{et} \\ u = \varphi(x) \end{array} \right\} y = f(\varphi(x))$$

Si je mettais à la place de u sa valeur, j'aurais un résultat de la forme $y = F(x)$, et je pourrais appliquer les règles connues pour trouver la dérivée de y . Mais, en général, on préfère ne pas effectuer cette substitution parce qu'on peut assez simplement l'éviter. — Je change x en $x + \Delta x$; u devient $u + \Delta u$, et y , $y + \Delta y$. or, on a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et, à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Donc

La dérivée relative à x d'une fonction $\varphi(u)$, u étant fonction $\varphi(x)$, est égale à la dérivée de la première fonction prise par rapport à u comme si u était une variable indépendante, et multipliée par la dérivée de la fonction u .

L'égalité précédente devient, en multipliant par dx ,

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du$$

Ceci semble une identité, et l'on pourrait croire au premier abord qu'il serait permis d'écrire sans démonstration. Mais remarquons bien que le du qui est au dénominateur désigne l'accroissement arbitraire que l'on

Donnerait à u en le considérant comme une variable indépendante, et qu'au contraire du, au numérateur, et la différentielle i. ad. une partie de l'accroissement de la fonction de x que u représente.

Le Théorème précédent est susceptible d'être Généralisé.
Supposons en effet qu'on ait

$$y = f(u) \quad u = \varphi(v) \quad v = \psi(x)$$

Il faut, d'après ce qui précède

$$dy = \frac{dy}{du} du$$

$$du = \frac{du}{dv} dv$$

$$dv = \frac{dv}{dx} dx$$

Multiplicant membre à membre, il vient

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

D'où que l'énoncé précédent est Général.

Il y a encore un Théorème assez important sur les fonctions de fonctions.

La différentielle d'une fonction y de plusieurs autres fonctions u, v, \dots de la variable x s'obtient en formant la somme du résultat auxquels on arrive en différentiant y par rapport à chacune des fonctions successivement, toutes les autres étant supposées constantes.

Démontrons le d'abord que pour le cas de deux fonctions,

$$y = f(u, v)$$

Il s'agit que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Supposons que u devienne $u + \Delta u$. Nous aurons alors

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

ou

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

or, par définition, on a

$$f(u + h) - f(u) = h \{ f'_u(u) + \varepsilon \}$$

Donc

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = \Delta v \{ f'_v(u, v) + \varepsilon \}$$

Quant à la différence des deux premiers termes de Δy , j'ai remarqué que j'aurais

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = \Delta u \{ f'_u(u, v) + \alpha \}$$

Cette égalité étant vraie quelque soit v , j'aurais

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) = \Delta u \{ f'_u(u, v + \Delta v) + \alpha' \}$$

De sorte que Δy devient, en divisant par Δx ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \{ f'_u(u, v + \Delta v) + \alpha' \} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \{ f'_v(u, v) + \varepsilon \}$$

En passant à la limite, et revenant à la notation différentielle, on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{dy}{du} + \frac{dv}{dx} \frac{dy}{dv}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Le théorème se démontrerait de même pour trois ou plusieurs fonctions.



Quelques applications.

Soit M un point d'une courbe AB , MS la tangente, MN la normale et MP l'or.
Donnée. La sous-normale NP a une expression différentielle très simple. En effet

$$NP = y \operatorname{Tg} NMP = y (-\operatorname{Tg} MSP) = -y \frac{dy}{dx}$$

On nous donne une sous-normale négative. Elle aurait été positive si l'ordonnée du point M est en croissant au lieu de décroître aux environs du point M . Car alors évidemment on aurait eu

$$NP = y \operatorname{Tg} NMP = y \operatorname{Tg} MSP = y \frac{dy}{dx}$$

on trouve donc une sous-normale positive ou négative, selon qu'elle est considérée dans le sens des x positifs ou négatifs à partir du pied de l'ordonnée, ou bien suivant que cette ordonnée est croissante ou décroissante. Et, selon qu'elle croît ou décroît, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est positive ou négative. Donc, en définitive, la valeur de NP devient toujours > 0 . on est donc toujours sûr.

$$NP = \text{sous-norm.} = y \frac{dy}{dx}$$

Et si l'on trouve une valeur négative, c'est que la sous-normale doit être considérée du côté des x positifs négatifs.

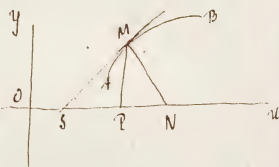
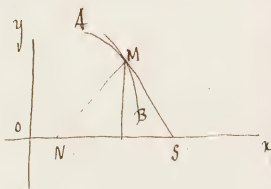
actuellement, sachant que dans la Parabole, la sous-normale est constante, proposons-nous le problème : la Parabole est-elle la seule courbe dans laquelle la sous-

normale est constante ? - Posons $y \frac{dy}{dx} = p$ et cherchons quelles sont les fonctions y qui peuvent satisfaire à cette relation. Multipliant par dx , elle devient $y dy = p dx$. Le premier membre est la différentielle de $\frac{1}{2} y^2$, le 2. celle de px . Or, quand deux fonctions ont leurs différentielles égales, il est aisé de voir que leur différence est constante. Donc on aura, C étant une constante arbitraire, $\frac{1}{2} y^2 = px + C$ ou $y^2 = 2px + 2C$, i.e. générale de paraboles qui ont un paramètre commun égal au double de la sous-normale. - Donc la seule courbe qui jouisse de la propriété demandée est bien la Parabole.

Problème : Quelles sont les courbes dans lesquelles la sous-normale est proportionnelle à l'abscisse ? - Il faut que l'on ait $y \frac{dy}{dx} = ax$, ou $2y \frac{dy}{dx} = 2ax$, ce qui revient à $d(y^2) = d(ax^2)$. Donc on devra avoir $y^2 = ax^2 + C$, i.e. générale qui représente une suite d'hyperboles ou d'ellipses suivant le signe de a . Si $a = 1$ il vient $y^2 = x^2 + C$ ce qui donne une suite d'hyperboles équilatères rapportées à leurs asymptotes principales pour axes coordonnés. Cela démontre en passant ce théorème, que, dans une hyperbole équilatère rapportée à son centre et à ses axes, la sous-normale est égale à l'abscisse.

Si la sous-normale devait être proportionnelle à l'ordonnée il eq. serait $y \frac{dy}{dx} = ay$, et, en supprimant la restriction $y \neq 0$, qui représente l'axe des xy , $dy = adx$. Donc on finit l'eq. générale demandée est $y = ax + C$, i.e. qui représente une série de droites parallèles.

Si l'on demandait la courbe dans laquelle la sous-normale est en puissance m de l'abscisse : $y \frac{dy}{dx} = x^m$ ou $y dy = x^m dx$, ou $d(\frac{y^2}{2}) = d(\frac{x^{m+1}}{m+1})$. Donc



Eq. générale est $y' = 2 \frac{y^{m+1}}{m+1} + C$, l'q. qui se simplifie dans quelques cas particuliers.

on peut obtenir avec tout autre Degré l'expression différentielle de la courbe. Tangente. on trouve
 Tangente = $y \frac{dy}{dx}$

et l'on pourrait résoudre les mêmes problèmes que sur la courbe normale. La marche à suivre est la même.

Des Séries.

Une Série est une suite infinie de quantités qui se déterminent l'une d'autre d'après une loi déterminée.

Dans une série

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

on désigne par S_n la somme des n premiers termes

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Si, pour des valeurs toujours croissantes de n , S_n tend indéfiniment vers une certaine valeur limite S , cette limite prend le nom de Somme de la série, et l'on dit que la série est Convergente: on a alors $\lim S_n = S$. Si cette condition n'est pas remplie, la série est Divergente.

Il s'agit de savoir comment on peut reconnaître si une série est ou non Convergente.

D'abord, si l'on compare deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1} , il faut évidemment qu'elles convergent vers une même limite finie, et que par conséquent la différence $S_{n+1} - S_n$ converge vers zéro.

$$\lim (S_{n+1} - S_n) = 0$$

$$\text{ou} \quad \lim a_n = 0$$

ainsi Il faut que les Termes aillent en décroissant indéfiniment jusqu'à zéro.

Cette condition, nécessaire pour que la série soit Convergente, n'est pas suffisante. Pour s'en assurer, on n'a qu'à considérer la série

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

Celle est Divergente. En effet, considérons la somme

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

c. ad. les n termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ leur somme est plus grande que n fois le dernier, ou que $\frac{1}{2}$ - constante

En 2^e termes suivants

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

l'une d'elles est plus grande que 2n fois le dernier ou $\frac{1}{4n}$; et ainsi de suite; on pourra, à partir d'un terme quelconque isoler un nombre infini de groupes qui seront tous plus grands que $\frac{1}{2}$. Donc ce qu'on négligerait en s'arrêtant à un terme quelconque serait plus grand que $\frac{1}{2}$ répétitivement un nombre infini de fois, ce qui prouve évidemment que la série est divergente.

Cette série (1) s'appelle série harmonique. — En effet, si sur une droite AB on prend des longueurs $AB = \frac{1}{n}$, $AC = \frac{1}{n+1}$, $AD = \frac{1}{n+2}$ les 4 points A, B, C, D sont conjugués harmoniques; de telle sorte qu'on a

$$AB \cdot DC = AD \cdot CB$$

ou

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

et c'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Théorème. Pour qu'une série soit convergente, il suffit que, si l'on considère les sommes $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots, S_{n+p}$, quelque grand que soit p, pourvu qu'il n'augmente pas indéfiniment, toutes ces sommes convergent vers une limite finie commune, et pour cela, il suffit évidemment que

$$\lim (S_{n+p} - S_n) = 0$$

ou

$$\lim (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p-1}) = 0$$

ainsi

Théorème. Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'en s'arrêtant à un terme quelconque, la somme des p termes suivants converge vers zéro, quand on l'avance de plus en plus loin dans la série.

Cette condition générale est évidente, mais n'est pas toujours facile à constater, et il est souvent avantageux de la remplacer

pour des caractères d'une application plus aisée.

1. Séries à Termes positifs.

Soit la série

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

considérons aussi la série

$$(2) \quad v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

que nous supposons convergente. Si l'on peut constater que pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre donné, on a toujours

$$a_n < c v_n$$

c étant une constante quelconque, on peut affirmer que la série (1) est aussi convergente.

En effet, on aura alors

$$a_{n+1} < c v_{n+1}$$

$$a_{n+2} < c v_{n+2}$$

⋮

$$a_{n+p} < c v_{n+p}$$

Donc

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < c (v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p})$$

c étant constant, le 2^d. membre converge vers zéro quand n croît au delà de toutes limites. Donc aussi le premier: donc la série (1) est convergente.

Considérons comme application la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} + \dots$$

Je la compare avec la progression décroissante

$$\frac{1}{1.2 \dots (n-1)n} + \frac{1}{1.2 \dots (n-1)n^2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots (n-1)n^n} + \dots$$

qu'il en soit d'une série convergente. Les termes que je compare
sont ceux qui se correspondent dans les deux séries ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{1.2 \dots n} & \frac{1}{1.2 \dots n(n+1)} & \frac{1}{1.2 \dots n(n+1)(n+2)} & \frac{1}{1.2 \dots n(n+1)(n+2)(n+3)} \dots \\ \frac{1}{1.2 \dots n} & \frac{1}{1.2 \dots (n-1)n^2} & \frac{1}{1.2 \dots (n-1)n^3} & \frac{1}{1.2 \dots (n-1)n^4} \dots \end{array} \right.$$

on voit que chaque terme de la progression géométrique est
plus grand que le terme correspondant de la série proposée. Donc
celle-ci est convergente.

Cherchons, dans cette série, la valeur de S_n . on a

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots (n-1)}$$

En s'arrêtant au n^{e} terme, l'erreur commise sera donc plus petite que

$$\frac{1}{1.2 \dots (n-1)n} + \frac{1}{1.2 \dots (n-1)n^2} + \dots \text{ etc.}$$

ou

$$Er. < \frac{\frac{1}{1.2 \dots n}}{1 - \frac{1}{n}} < \frac{1}{1.2 \dots (n-2)(n-1)^2}$$

Si par exemple on prend 11 termes, on a

$$Er. < \frac{1}{1.2 \dots 9.10^2} < \frac{1}{10^7}$$

On représente habituellement la somme de cette série par e
et l'on a

$$e = 2,718281828 \dots$$

L'inspection seule de la série fait voir immédiatement qu'elle
est plus grande que 2. on peut voir facilement encore qu'elle
est inférieure à 3. car

$$e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$$

Je dis maintenant que la valeur de e est incommensurable.
car, supposons qu'elle peut être exprimée par une fraction irré-
ductible $\frac{a}{b}$, et qu'il en est

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots (b-1)} + \frac{1}{1.2 \dots b} + \frac{1}{1.2 \dots (b+1)} + \dots$$

en multipliant par $1.2 \dots b$ on aurait

$$a(b-1)(b-2) \dots 3.2.1 = K + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots$$

k étant un nombre entier. or

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots < \frac{1}{b+1} + \left(\frac{1}{b+1}\right)^2 + \dots < \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} < \frac{1}{b}$$

à fortiori $\dots < 1$. — Donc l'égalité ci-dessus est absurde. — Donc la valeur de e est incommensurable.

Revenons maintenant à donner d'autres caractères plus simples au moyen desquels on peut reconnaître la convergence d'une série.

Théorème. — Si, pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre donné, on constate que $\sqrt[n]{a_n}$ est $< k$, k étant un nombre constant < 1 , la série est convergente.

(on en aura)

$$a_n < k^n$$

$$a_{n+1} < k^{n+1}$$

$$a_{n+2} < k^{n+2}$$

$$a_{n+p} < k^{n+p}$$

Donc

$$a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^p)$$

à fortiori

$$< k^n \frac{1}{1-k}$$

Le second membre a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment. Donc la série proposée est convergente.

Si l'on prenait S_n pour les valeurs de S , l'erreur commise aurait pour limite supérieure $\frac{k^n}{1-k}$.

Si maintenant, on avait $\sqrt[n]{a_n} > k$ et $k > 1$ ou même $k = 1$, la série serait évidemment divergente.

Enfin on ne pourrait rien conclure dans le cas où l'on aurait $\sqrt[n]{a_n} < k$, et $k \leq 1$, ou bien $\sqrt[n]{a_n} > k$ et $k < 1$.

Théorème. - Si, pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre donné, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < K$, et $K < 1$, la série est convergente.

En effet, on a alors

$$a_{n+1} < K a_n$$

$$a_{n+2} < K a_{n+1}$$

$$< K^2 a_n$$

$$a_{n+3} < K^3 a_n$$

$$a_{n+p} < K^p a_n$$

Donc

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < a_n (K + K^2 + \dots + K^p)$$

$$< a_n \frac{K}{1-K}$$

Le second membre tend vers zéro quand n augmente, puisque $\lim a_n = 0$, sans qu'il y ait à chercher aucune condition de convergence. - Donc la série est bien convergente.

Si l'on prend S_n pour S , la limite de l'erreur commise est $\frac{K a_n}{1-K}$.

Ce théorème est d'un emploi commode quand les termes de la série dérivent l'un de l'autre par l'introduction ou la suppression d'un facteur, et que deux termes consécutifs se trouvent ainsi contenir un grand nombre de facteurs communs qui disparaissent par la division.

Soit par ex. la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} + \dots$$

La valeur de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est $\frac{x}{n+1}$. Si n croît, quel que

soit x , le rapport finit toujours par devenir < 1 . Dans la série est convergente quel que soit x .

au contraire, si $\frac{a_{n+1}}{a_n} > K$ et $K \geq 1$, la série est Divergente: car les termes ne vont plus alors en décroissant.

Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constamment $< (K=1)$, mais a pour limite 1, on ne peut faire usage de ce caractère qui n'indique plus rien. En effet, on a alors

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < a_n (K + K^2 + \dots)$$

et, à la limite, l'inégalité se change en égalité

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = a_n (1 + 1 + \dots),$$

a_n tend vers zéro: mais la parenthèse augmente indéfiniment. on ne peut donc rien conclure.

Soit par exemple la série

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

Si $x=1$, on sait déjà que la série est Divergente. Si $x < 1$, elle le sera encore à plus forte raison. — Supposons donc $x > 1$.

Le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ devient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+2)^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^x = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^x$$

Ce rapport, pour des valeurs finies de n , est toujours < 1 : mais, si n augmente indéfiniment, il converge vers 1. on ne peut donc rien affirmer. — Je vais faire voir cependant qu'ici la série est convergente. Considérons S_n

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x}$$

n est toujours compris entre deux puissances consécutives de 2.

Soit $n \geq 2^m$, donc $n < 2^{m+1}$, donc $n \leq 2^{m+1} - 1$. Si je continue la série jusqu'à $(2^{m+1} - 1)^x$, j'aurai une quantité égale ou supérieure à S_n . Donc

$$S_n \approx 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^2}$$

on peut grouper les termes de cette série en prenant pour 1^{er} terme de chaque groupe celui dont le dénominateur est une puissance de 2 ou d'une puissance de 2 : ainsi

$$S_n \approx 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^m)^2} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^2}\right)$$

La première parenthèse est plus petite que 2 fois son 1^{er} terme, ou que $\frac{1}{2^{2-1}}$; la seconde est plus petite que 4 fois son 1^{er} terme, ou que $\frac{2^2}{2^{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2^{2(2-1)}}$, etc. enfin le dernier groupe renferme un nombre de termes égal à $2^{m+1} - 2^m + 1 = 2^m$ et il est plus petit que 2^m fois son 1^{er} terme, donc $< \frac{2^m}{2^{m \cdot 2}} = \frac{1}{2^{m(2-1)}}$
Donc enfin

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{2-1}} + \frac{1}{2^{2(2-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{m(2-1)}}$$

or le second membre est la somme des termes d'une progression Géométrique Décroissante: elle converge vers une limite finie lorsque n augmente indéfiniment. Donc la série est Convergente.

Ainsi une série peut être convergente quand $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, toujours < 1 , converge vers 1. Mais elle peut aussi être Divergente dans le même cas. Car, dans la série Harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

le rapport est toujours < 1 et converge vers 1.

Il y a pourtant certains cas où l'on peut reconnaître, lorsque le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, toujours < 1 ,

converge vers 1, s'il y a convergence ou Divergence, et
voici comment. — Mais que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers 1, on
pourra poser

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\alpha}$$

α convergant indéfiniment vers zéro. Or je dis que

Lemme. — Si, pour des valeurs croissantes de n , le
produit $n\alpha$ reste supérieur à K , $K > 1$, la série est
convergente.

Posons $K = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers. Il est facile de
reconnaître qu'on peut prendre n assez grand pour qu'on ait

$$1+\alpha > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

En effet, admettons que cette inégalité soit vraie; on en tirera

$$(1+\alpha)^q > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

ou, en développant d'après le Binôme de Newton,

$$1+q\alpha + \frac{q(q-1)}{1.2} \alpha^2 + \dots + \alpha^q > 1+p\frac{1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

Effectuant 1 de part et d'autre, multipliant par n , divisant
par q , et faisant passer dans le 1^{er} membre le 1^{er} terme
du second, il vient

$$\left(n\alpha - \frac{p}{q}\right) + \frac{q-1}{1.2} n\alpha^2 + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2.3} n\alpha^3 + \dots + n\alpha^{q-1} > \frac{p(p-1)}{q.1.2} \frac{1}{n} + \frac{p(p-1)(p-2)}{q.1.2.3} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{q.n^{p-1}}$$

Si n est assez grand, $n\alpha - \frac{p}{q}$ ou $n\alpha - K$ est par hypo-
thèse une quantité finie et positive; tout le reste décroît
indéfiniment, donc l'inégalité se vérifie. Donc on a bien

$$1+\alpha > \left(1+\frac{1}{n}\right)^K$$

Il suit de là que

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^K}$$

$$< \frac{n^K}{(n+1)^K}$$

ou bien

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n^k}{(n+1)^k}$$

or, si je considère la série convergente

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$$

dont je représente les termes par

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

je vois que le rapport $\frac{n^k}{(n+1)^k}$ est précisément $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Donc on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Donc

$$a_{n+1} < u_{n+1} \cdot \frac{a_n}{u_n}$$

De même

$$a_{n+2} < u_{n+2} \cdot \frac{a_{n+1}}{u_{n+1}}$$

$$< u_{n+2} \cdot \frac{a_n}{u_n} \quad \text{à fortiori} \quad (x)$$

$$a_{n+3} < u_{n+3} \cdot \frac{a_n}{u_n}$$

$$a_{n+p} < u_{n+p} \cdot \frac{a_n}{u_n}$$

on voit donc que chaque terme de la série proposée est plus petit que le terme correspondant d'une série convergente, multiplié par une quantité fixe $\frac{a_n}{u_n}$. Donc la proposée est convergente, c q f d.

Soit par exemple la série

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

Ici $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$. Ce rapport est < 1 et converge vers 1:

on ne peut donc rien affirmer. Mais remarquons que

$d = \frac{2}{n}$. Donc $nd = 2$. Donc la série est convergente. — Et l'on pourrait voir qu'elle a pour somme l'unité.

Si maintenant $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est tel que nd reste au contraire $< K$, $K < 1$, alors il y aura Divergence. Le raisonnement est le même, si l'on a soin de renverser partout les inégalités posées, et si l'on remarque que, pour $K < 1$, la série u_1, u_2, u_3, \dots est Divergente.

Soit par exemple la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2)} + \dots$$

on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}}$$

D'où

$$nd = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim nd = \frac{1}{2}$$

Donc la série sera Divergente. — on peut remarquer que c'est le Développement de $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ quand on y fait $x=1$.

Pretons au contraire la série.

$$1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+3} + \dots$$

on a ici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1 + \frac{6n+5}{4n^2+4n+1}}$$

D'où

$$nd = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} \quad \lim nd = \frac{3}{2}$$

Donc cette nouvelle série est Convergente.

Si le produit nd restait toujours < 1 et avait pour Limite 1, nous pourrions encore affirmer qu'il y a Divergence. En effet, de $nd < 1$ on tire $d < \frac{1}{n}$, et $1+d < 1 + \frac{1}{n}$, D'où

$\frac{1}{1+2} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, ce qui revient à $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_{n+1}}{a_n}$, a_n étant le terme général de la Série Divergente $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$.
Donc la proposée est aussi Divergente.

au contraire, si $n a$, toujours plus grand que 1, avait pour limite 1, ce serait le seul cas Douteux que ce caractère pût présenter.

Remarque. - Nous avons considéré deux cas principaux. pour la convergence, ceux où l'on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$ ou $a_n^{\frac{1}{n}} < k$ k étant < 1 dans l'une et l'autre circonstance. - Il est bon de remarquer que ces deux caractères se confondent sous un certain point de vue, c.à.d. que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim a_n^{\frac{1}{n}}$$

Prenons en effet

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

Il s'ensuit que, pour des valeurs de n Supérieures à un certain nombre fixe p , les rapports

$$\frac{a_{p+1}}{a_p}, \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}, \frac{a_{p+3}}{a_{p+2}}, \dots, \frac{a_{p+q}}{a_{p+q-1}}$$

Diffèrent très-peu de k , et pourront être regardés comme compris entre $k-\epsilon$ et $k+\epsilon$. Donc la moyenne Géométrique de ces rapports, c.à.d. $\left(\frac{a_{p+q}}{a_p}\right)^{\frac{1}{q}}$, sera elle-même comprise entre $k-\epsilon$ et $k+\epsilon$, et pourra être représentée par $k+\epsilon$.

De sorte que l'on aura

$$\left(\frac{a_{p+q}}{a_p}\right)^{\frac{1}{q}} = k + \epsilon$$

Je pose $p+q = n$, d'où $q = n-p$. Elevant les deux

nombre à la puissance q , il vient

$$a_n = a_p (k+2)^{n-p}$$

$$\text{Donc} \quad a_n^{\frac{1}{n}} = a_p^{\frac{1}{n}} (k+2)^{1-\frac{p}{n}}$$

Si n croît indéfiniment, on aura

$$\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \lim a_p^{\frac{1}{n}} \cdot k = k$$

car $\sqrt[n]{A}$ converge toujours vers 1 quand n augmente au
delà de toutes limites. Donc

$$\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Séries à Termes positifs et négatifs.

Théorème. — Si, en réduisant tous les Termes à leur
valeur numérique à partir de n^e , on trouve une seconde
série convergente, la première l'est aussi.

Cela est parfaitement clair.

Cette condition est suffisante, mais non pas nécessaire.
ainsi la série suivante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

est divergente, quoique celle-ci

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

soit convergente; car :

Théorème. — Toutes les fois que, à partir d'un certain
rang, les Termes finissent par devenir alternativement positifs
et négatifs, et que de plus leurs valeurs numériques dimi-
nuent indéfiniment, il y a Convergence.

Mettons en lignes en évidence, et prenons la série

$$a_1, a_2, a_3, \dots, -a_n + a_{n+1} = a_{n+2} + \dots$$

ou nous supposons que la loi se vérifie à partir du n^o ter.
me. — Considérons les p^o termes qui suivent a_n . Ce seront

$$\text{Si } p \text{ est pair, } +a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + a_{n+p-1} - a_{n+p}$$

$$\text{" impair } +a_{n+1} - a_{n+2} + \dots - a_{n+p-1} + a_{n+p}$$

Dans ces deux cas, l'ensemble de ces termes est positif. Cela résulte évident si l'on remarque qu'ils vont en décroissant et qu'ils peuvent se grouper de la manière suivante par couples essentiellement positifs, finissant par un seul terme positif dans le 2^o cas.

$$+(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

et

$$+(a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + a_{n+p}$$

De plus, dans les deux cas encore, cette somme est plus petite que a_{n+1} : car elle peut s'écrire

$$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) - a_{n+p}$$

et

$$a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

Donc, si R est l'ensemble des termes qui suivent a_n , on a constamment

$$0 < R < a_{n+1}$$

Donc R a pour limite zéro : Donc la série est convergente.

On voit en même temps que, dans une pareille série, l'erreur est toujours de signe contraire à celui du terme après lequel on s'arrête, et plus petite que ce même terme, c'est-à-dire le 1^o de ceux qu'on ne prend plus.
ainsi, soit la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Si je prends n termes, j'ai un résultat trop petit, c.à.d. une valeur positive, et la différence avec le résultat réel est plus petite que $\frac{1}{n}$.

ainsi, la série a termes positifs et négatifs se partageant en deux grandes classes: celles qui restent convergentes quand on réduit leurs termes à leurs valeurs numériques, et celles qui ne sont convergentes qu'à cause des réductions que la différence des signes amène entre leurs termes.

Quand une série est convergente lui-même, qu'on réduit tous ses termes à leur valeur numérique, il est permis d'intervertir l'ordre des termes, sans que la série cesse d'être convergente et d'avoir la même somme.

En effet, soit

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

une série de ce genre. appelons

$$s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, \dots$$

les valeurs numériques des termes qui suivent a_n , et posons

$$R_n = s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + \dots$$

Je suppose que, dans la série (1), on intervertisse l'ordre des termes suivant une loi déterminée quelconque, de manière à avoir

$$(2) \quad a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n, a'_{n+1}, a'_{n+2}, \dots$$

Je considère les sommes

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S'_n = a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_n$$

En prenant $m > n$, je pourrai toujours m'arranger de façon que S'_m contienne tous les termes qui entrent dans S_n : de sorte que j'aurois $S'_m = S_n +$ un certain nombre de termes, positifs ou négatifs, suivant partie de la suite a_{n+1}, a_{n+2}, \dots Mais l'ensemble de ces termes sera inférieur à R_n . Donc on pourra poser

$$S'_m = S_n \pm \theta R_n \quad 0 < \theta < 1$$

À la limite, pour m et n croissant indéfiniment, on a, et
 restant toujours assez supérieur à n pour que la condition
 que j'ai supposée soit remplie,

$$\lim S'_m = \lim S_n.$$

Donc la série est convergente, et vers la même somme
 quel que soit l'ordre de l'intervention de l'ordre de ses termes.

Si au contraire, la série n'est convergente, qu'à cause
 des réductions qui s'opèrent, on ne peut intervertir ainsi
 l'ordre des termes sans s'exposer à de graves conséquences.
 Soit la série

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

qui est le Log. népérien de 2 : elle est convergente. Mais
 si nous prenons négativement tous les termes, de manière
 à avoir

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots$$

ou positivement, ce qui revient au même, nous aurons
 des séries divergentes. Je dis qu'alors on ne peut échanger
 d'une manière quelconque l'ordre des termes : — Revenons
 donc la série (1) l'ensemble des termes négatifs

$$-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

leur somme croît indéfiniment. Je puis donc distribuer
 ces termes en une infinité de groupes dont chacun soit
 plus grand que k , et placer chaque groupe à la suite
 d'un terme négatif positif. on conçoit ainsi que, pour
 certaines valeurs de k , il pourra très-bien se faire que
 chaque groupe négatif, plus le terme positif correspondant,
 donne une valeur négative, > m en valeur absolue, et, comme
 il y aura une infinité de ces différences, la série deviendra
 divergente. ainsi, je prends chaque groupe négatif

plus grand que $\frac{1}{4}$: j'aurai la nouvelle série

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} \right) \\ & + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{32} \right) + \dots \\ & + \frac{1}{1+2n} - \left(\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ & + \frac{1}{1+2(n+1)} - \left(\frac{1}{2^{n+1+2}} + \frac{1}{2^{n+1+4}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1+1}} \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Je dis qu'elle est divergente. En effet, les groupes entre parenthèses sont tous $> \frac{1}{4}$; les termes positifs qui les précèdent décroissent indéfiniment: donc les différences vont en augmentant en valeur absolue. Or, si je prends $\frac{1}{9}$ moins de 2^e groupe par ex. la différence, en valeur absolue, est plus grande que $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$ ou $\frac{5}{36}$, à fortiori que $\frac{1}{36}$ ou $\frac{1}{9}$: donc, algébriquement, cette différence est $< -\frac{1}{9}$. Donc la somme de la série, à partir de là, est plus petite que $-(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \dots)$ jusqu'à l'infini: donc elle est infiniment grande négativement et la série est divergente.

Remarquons que le groupement peut être opéré de manière que la série ait une autre somme tout en restant convergente. — En effet, dérivons la série (1) de la manière suivante

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

Je dis que cette série nouvelle est encore convergente, mais qu'elle n'a plus la même somme que la proposée. — Mais arrivons en effet S. et S' étant les sommes des deux séries,

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

$$S'_{2n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

D'autre

$$S'_{2n} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1}$$

Donc l'on a, évidemment

$$S'_{2n} - S_{2n} > n \cdot \frac{1}{4n-1} > \frac{1}{4}$$

$$S'_{2n} - S_{2n} < n \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim (S'_{2n} - S_{2n}) \neq 0$$

$$S' \neq S \quad \text{c.q.f.d.}$$

Séries ordonnées par rapport à x .

Souvent on considère des séries ordonnées par rapport aux séries puissances positives et ascendantes d'une variable x , telles que celle-ci

$$(1) \quad a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$$

Supposons que l'on trouve

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$$

D'ailleurs, il s'ensuit qu'on aura également.

$$A = \lim a_n^{\frac{1}{n}}$$

Il est visible que

$$\lim \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = A x$$

Ce rapport, absolument parlant, devra toujours être < 1 , il en résulte que la série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{1}{A}$ et $+\frac{1}{A}$. — au contraire, si x sort de ces limites, il y aura divergence : car alors le rapport d'un terme au précédent surpassera l'unité. $Ax > 1$,

Il n'est donc plus vrai de dire que les termes vont en décroissant. — Si $x = \pm \frac{1}{A}$, c'est là le seul point douteux qui demande alors une discussion spéciale dans chaque cas.

Soit pour exemple la série

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + \dots$$

Est-elle convergente pour toutes les valeurs de x ? on trouve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m-n+1}{n-1} x$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -x$$

Pour la convergence, il faut que x soit compris entre -1 et $+1$.

La série en x donne lieu à quelques remarques curieuses.

Théorème. — Si l'on a une série convergente

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Dont les termes ont des signes quelconques, et si on la multiplie terme à terme par la série des puissances ascendantes de x , la série nouvelle

$$(2) \quad a_0 x^0, a_1 x^1, a_2 x^2, \dots, a_n x^n, \dots$$

sera toujours convergente pour les valeurs de x inférieures à 1.

En effet on a

$$\sqrt[n]{a_n x^n} = x \sqrt[n]{a_n}$$

or, puisque la série (1) est convergente, $\sqrt[n]{a_n}$ sera par conséquent plus grand que l'unité: car alors, a_n serait toujours > 1 . Donc $\sqrt[n]{a_n}$ tend vers une limite inférieure à 1, ou tout au plus égale. Si donc $x < 1$, $x \sqrt[n]{a_n}$ sera certainement < 1 , et la série (2) sera convergente. c.q.f.d.

Corollaire I. - Si une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

est convergente pour $x = a$, et la série pour toute valeur de x plus petite que a .

En effet, nous pouvons, pour mettre a en évidence, écrire la série sous la forme suivante

$$a_0 + a_1 a \cdot \frac{a}{a} + a_2 a^2 \left(\frac{a}{a}\right)^2 + \dots + a_n a^n \left(\frac{a}{a}\right)^n + \dots$$

Mais par hypothèse, la série $a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \dots$ est convergente: on la multiplie terme à terme par la série $\left(\frac{a}{a}\right)^0 + \left(\frac{a}{a}\right)^1 + \left(\frac{a}{a}\right)^2 + \dots$ dans laquelle $\frac{a}{a} < 1$. On rentre donc dans le théorème précédent, et par conséquent, le théorème est démontré.

Corollaire II. - Si une série

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

est convergente pour $x = a$, la série des dérivées sera convergente pour toute valeur de x plus petite que a .

En effet, la série des dérivées sera

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

et le rapport de deux termes consécutifs donne

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{a_{n+1}}{a_n} a \cdot \frac{x}{a}$$

or $\frac{a_{n+1}}{a_n} a$ a une limite qui, par hypothèse, est au plus égale à 1. D'ailleurs $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\frac{x}{a} < 1$. Donc la limite du rapport de deux termes consécutifs est < 1 : donc la série est convergente.

Remarque. - on ne peut pas affirmer que, pour $x = a$, la série des dérivées soit encore convergente. - Cela résulte

De raisonnement lui-même... ainsi, soit

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Cette série est convergente pour $x=1$. La série dérivée sera

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

et, pour $x=1$, cette série n'est pas convergente.

Séries Imaginaires.

Enfin, on considère quelquefois Des Séries à termes Imagi-
naires, De cette forme

$$(1) \quad a_1 + b_1 \sqrt{-1}, \quad a_2 + b_2 \sqrt{-1}, \quad \dots \quad a_n + b_n \sqrt{-1}, \quad \dots$$

Si j'appelle S_n la somme Des n premiers Termes, S'_n la
Somme Des n premiers coefficients rationnels $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, et
 S''_n la somme $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, il est visible que j'aurai

$$S_n = S'_n + S''_n \sqrt{-1}$$

Si S'_n et S''_n ont Deux Limites S' et S'' , alors évidemment

$$\lim S_n = S' + S'' \sqrt{-1}$$

on dit alors que la série Imaginaire proposée est convergente,
et a pour Somme $S' + S'' \sqrt{-1}$. - Dans le cas contraire, on
dit que la série Imaginaire est Divergente.

on reconnaît facilement, pour la convergence Des Séries
Imaginaires, plusieurs Caractères déjà trouvés pour les autres
Séries. ainsi, il est évident que, pour que la série (1) soit
convergente, il faut que le terme Général $a_n + b_n \sqrt{-1}$ tende
vers zéro (ce qui est une manière de dire que a_n et b_n
doivent tendre vers zéro), condition qui équivaut à celle-ci,
savoir, que la quantité $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ doit diminuer indéfiniment.
ainsi :

Théorème. — Pour qu'une série Imaginaire soit convergente, il faut que les modules des Termes Successifs aillent en convergant vers zéro.

Cette condition est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.

on met souvent les quantités Imaginaires sous la forme

$$a_n + b_n \sqrt{-1} = \rho_n (\cos \theta_n + \sqrt{-1} \sin \theta_n)$$

on voit donc, d'après cette forme seule, que si la série des modules

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n$$

est convergente, il en est de même de la proposée. En effet, il est alors évident que les deux séries

$$\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2 + \dots + \rho_n \cos \theta_n + \dots$$

et

$$\rho_1 \sin \theta_1 + \rho_2 \sin \theta_2 + \dots + \rho_n \sin \theta_n + \dots$$

sont encore à plus forte raison convergentes.

ainsi, on voit qu'il faut que

Théorème. — 1°. Pour qu'une série Imaginaire soit convergente, il faut que, dans la série des modules, les Termes aillent en décroissant indéfiniment jusqu'à zéro.

2°. Pour qu'une série Imaginaire soit convergente, il suffit que la série des modules le soit.

Je suis de ce second principe que, étant donnée une série Imaginaire, si l'on cherche la série des modules

$$(2) \quad \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$$

si on écrit on trouve

$$R = \lim \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \lim \rho_n^{\frac{1}{n}}$$

si $R < 1$ il y aura convergence dans la série des modules

et par suite aussi dans la série Imaginaire. — Si $k > 1$, il y aura Divergence dans la série des modules. Cela suffit-il pour qu'il y ait aussi Divergence dans la série Imaginaire ? oui, dans ce cas particulier. Car bien qu'en général, il puisse y avoir Divergence dans la série (2) et convergence dans la série (1), cependant il arriverait ici que $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ étant > 1 , les modules n'iraient pas en convergeant vers zéro : il y aurait donc Divergence, d'après le 1^{er} caractère. — Si $k = 1$, il y a doute.

De ce que la série Imaginaire est toujours convergente quand la série des modules l'est elle-même, il ne faudrait pas conclure que la Divergence de cette dernière entraînerait nécessairement celle de la série Imaginaire. — Il peut au contraire en être autrement. — Soit par exemple la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

que j. considère comme une série de modules : je sais qu'elle est Divergente : seulement ici la Divergence n'est pas indiquée par le caractère $k > 1$, puisque $k = 1$. — Or la série imaginaire correspondante peut être convergente. Pour en former une, je prends le terme Général

$$P_n (\sin \theta_n \cdot \sqrt{-1} + \cos \theta_n)$$

j'y pose $P_n = \frac{1}{n+1}$ et $\theta_n = (n + \frac{1}{2})\pi$. alors, tous les Cosinus seront nuls, & la formule deviendra

$$\sqrt{-1} - \frac{1}{2} \sqrt{-1} + \frac{1}{3} \sqrt{-1} - \frac{1}{4} \sqrt{-1} + \dots$$

La série des modules sera bien la série Divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

et pourtant la série Imaginaire est bien convergente, puisqu'elle se réduit à

$$\sqrt{-1} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots)$$

Enfin, considérons une série Imaginaire $\sum a_n$ termes réels
nûs suivant les puissances ascendantes de x ,

$$(a_0 + b_0 \sqrt{-1}) + (a_1 + b_1 \sqrt{-1})x + (a_2 + b_2 \sqrt{-1})x^2 + \dots$$

et supposons que l'on donne à x des valeurs Imaginaires.
Sous quelles limites ces valeurs devront-elles être comprises pour
que la série résultante soit convergente? — Je fais

$x = \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$ et je pose $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n$. Le module
de l'anne général de la série résultante sera $A_n \rho^n$. Si je
prends le rapport d'un module au précédent, j'aurai $\frac{A_{n+1}}{A_n} \rho$;
ou, si je prends la racine n^{e} du n^{e} terme, $A_n^{\frac{1}{n}} \rho$. Supposons

$$\lim A_n^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = k$$

alors $k\rho$ sera la limite correspondante à la série des
modules. Il s'ensuit donc que, toutes les fois qu'on
aura $k\rho < 1$, c'est-à-dire $\rho < \frac{1}{k}$, il y aura convergence dans
la proposée, puisque la série des modules sera convergente.
ainsi, on pourra donner à x toutes les valeurs Imaginaires
dont le module sera plus petit que $\frac{1}{k}$. Parmi ces valeurs
Imaginaires, il pourra s'en trouver de réelles, lesquelles, prises
positivement, seront leurs propres modules. Or, si ces
valeurs réelles sont, absolument parlant, inférieures à $\frac{1}{k}$, on
pourra affirmer que la série proposée sera convergente. — Si
maintenant on prend $\rho > \frac{1}{k}$, la série des modules sera
divergente : et comme sa divergence tiendra alors à ce que
ses termes successifs ne diminueront plus indéfiniment, il
s'ensuit que la série Imaginaire sera Divergente. — Resterait
le cas douteux de $\rho = \frac{1}{k}$.

On voit en outre, d'après ce qui précède, que :

Théorème : — Toutes les fois qu'une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes et entières de x sera convergente pour certaines valeurs réelles de la variable, elle restera convergente pour les valeurs Imaginaires qui auront pour modules les valeurs numériques de ces quantités réelles, ou des valeurs numériques plus petites.

Différentiation Des Fonctions Transcendantes

Fonctions Logarithmiques.

Soit la fonction $y = \log x$

on aura

$$\Delta y = \log(x+h) - \log x$$

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Il faut voir ce que devient cette expression pour $h=0$.

Posons $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$ et voyons ce qu'elle deviendra quand n croîtra au-delà de toutes limites. - Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{y} &= \frac{n}{x} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lim. \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Je vais démontrer que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, et il sera prouvé alors que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e.$$

Considérons d'abord la quantité n à valeurs entières, tout en permettant croître au-delà de toutes limites. - Il vient alors, d'après la formule du binôme, démontrée pour un exposant entier et positif,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{(n \cdot (n-1))}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \cdot \frac{1}{n^p} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

ou bien encore

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{p-1}{n})}{1 \cdot 2 \dots p} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Si l'on considère les différents termes écrits, le numérateur des premiers tend vers l'unité lorsque n augmente à l'infini. Les 1^{ers} termes se confondent donc avec ceux de la série e . Mais il ne faudrait pas conclure de là qu'il en fût de même pour tous les termes. Car, n augmentant, le nombre des termes augmente aussi, et, à la limite, p ou $p-1$ peut être comparable à n , en sorte que l'on n'est pas sûr que la limite de $\frac{p-1}{n}$ soit zéro, par suite que le numérateur $(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{p-1}{n})$ converge vers l'unité. — Voici comment on démontrera que cependant $\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$. — Considérons la série e . on peut écrire

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} + \varepsilon$$

ε étant une quantité positive: et je puis supposer p assez grand, mais fixe, pour que ε soit $< \delta$, quel que soit δ , fixe d'ailleurs comme p . — on pourra écrire de même

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{p-1}{n})}{1 \cdot 2 \dots p} + \varepsilon'$$

Il est évident que tous les Termes de ε' seront plus petits que ceux de ε . Donc $\varepsilon' < \varepsilon$ et à fortiori $\varepsilon' < \delta$. — effectivement, j'écris d'abord

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} + \varepsilon' - \alpha$$

Il faut bien que je retranche une quantité positive α . Car, en remplaçant les numérateurs des fractions par l'unité, je les ai augmentés, et par suite, j'ai augmenté la somme des fractions. — Comme p est une quantité déterminée, j'écris supposé n assez grand, pour que $\alpha < \delta$. J'aurai d'ailleurs

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \varepsilon + \alpha - \varepsilon'$$

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2\delta$$

et, comme je puis supposer δ aussi petit que je veux, la différence

$$e - \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sera toujours inférieure à 2δ , doit donc être rigoureusement nulle.

Supposons maintenant que n soit fractionnaire, et positif. n sera toujours compris entre deux nombres entiers, p et $p+1$. alors $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sera compris entre les deux quantités

$$\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}$$

qui peuvent encore s'écrire ainsi

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{1 + \frac{1}{p+1}} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

quantités qui, toutes deux, convergent vers e quand p augmente indéfiniment. Donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ qui est compris toujours entre deux, converge aussi vers la même limite.

Enfin, soit $n = -p$. alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)$$

Donc encore

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{c. q. f. d.}$$

Je vais encore donner une autre démonstration du même principe, due à M^r. Lefebvre de Bourey,

Négligeons par E. la somme des n premiers termes de E. e , et appelons N le développement de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, n pour le moment étant supposé fini. - on aura donc.

$$E = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n}$$

et

$$N = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1.2} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{1.2.3} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})}{1.2 \dots n}$$

on aura évidemment

$$N > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1.2} + \frac{(1 - \frac{2}{n})^2}{1.2.3} + \dots + \frac{(1 - \frac{n-1}{n})^{n-1}}{1.2 \dots n}$$

Donc

$$E - N < \frac{1}{1.2} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{1.2.3} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{n} \right)^2 \right\} + \frac{1}{1.2.3.4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{3}{n} \right)^3 \right\} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \right\}$$

Prions attention aux différences de puissances semblables qui se trouvent entre crochets: on a

$$1 - \left(1 - \frac{2}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} \cdot 2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right\}$$

$$1 - \left(1 - \frac{3}{n} \right)^3 = \frac{1}{n} \cdot 3 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{3}{n} \right) + \left(1 - \frac{3}{n} \right)^2 \right\}$$

$$1 - \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)^{n-1} = \frac{1}{n} (n-1) \left\{ 1 + \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) + \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)^{n-2} \right\}$$

Donc

$$E - N < \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \cdot 2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right\} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot 3 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{3}{n} \right) + \left(1 - \frac{3}{n} \right)^2 \right\} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} (n-1) \left\{ 1 + \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)^{n-2} \right\} \right]$$

Inégalité qui comporte à plus forte raison la suivante

$$E - N < \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1.2} + \frac{2.2}{1.2.3} + \frac{3.3}{1.2.3.4} + \dots + \frac{(n-1)(n-1)}{1.2.3 \dots n} \right\}$$

et a fortiori

$$\begin{aligned} E - N &< \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots (n-2)} \right\} \\ &< \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2 \dots (n-2)} + \frac{1}{1.2 \dots (n-1)} + \frac{1}{1.2 \dots n} \right\} \\ &< \frac{1}{n} E \end{aligned}$$

Le résultat est vrai quel que soit n . Or, si n augmente indéfiniment, E tend vers e ; le 2^e membre vers zéro;

On sait que, E étant toujours $> N$, le premier membre ne peut jamais devenir négatif. Donc, à la limite, il est rigoureusement nul, et l'on a

$$e = \lim N = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{c.q.f.d.}$$

Il suit de tout cela qu'on a bien

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \log e$$

Si l'on prend les logarithmes dans le système Népérien, comme alors $\log e = 1$, on aurait

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

on sait qu'il existe une relation remarquable entre $\log e$ et $L a$, $\log e$ étant le logarithme de e dans le système dont la base est a , et $L a$ le logarithme Népérien de a . En effet, on a par définition

$$a^{\log e} = e$$

Prenant les logarithmes Népériens des deux membres, il viendra :

$$L a \log e = 1$$

$$\log e = \frac{1}{L a}$$

On peut donc, au lieu de

$$d(\log x) = \frac{1}{x} \log e \, dx$$

écrire

$$d(\log x) = \frac{1}{x L a} \, dx$$

Si l'on fait $a = 10$, on a

$$\frac{1}{L 10} = \log e = 0,434294 \dots$$

C'est le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes Népériens pour les traduire en logarithmes Décimaux.

au moyen du Népérien des fonctions de fonctions, on pourra aussi trouver la différentielle $d(\log x)$, si l'on a

étant une fonction de x . En effet si, pour plus de simplicité, on prend $d(Lu)$ cette différentielle s'obtiendra en prenant la dérivée de Lu comme si u étoit variable indépendante, c. ad. $\frac{1}{u}$, et multipliant par la différentielle du dénominateur dx que u représente. Donc

$$d(Lu) = \frac{du}{u}$$

Si par exemple

$$u = x + \sqrt{1+x^2}$$

on aura

$$\begin{aligned} d(Lu) &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \\ &= \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Remarque I. — on appelle Intégrale d'une fonction différentielle une expression nouvelle dont la première est la différentielle. L'intégrale de la fonction $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ est donc $L(x + \sqrt{1+x^2})$. Mais, comme nous l'avons vu, deux fonctions qui ont même différentielle peuvent différer par une constante; l'intégrale demandée est en réalité $L(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, en désignant par C une constante arbitraire. — Le procédé qui consiste à remonter de la différentielle à l'intégrale s'appelle Intégration. on écrit ainsi le résultat trouvé.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

Le signe \int s'appelle Intégrale ou Somme. — De même, chaque théorème de calcul différentiel aura son inverse dans le calcul intégral.

Remarque II. — Comme la différentiation des Logarithmes est indépendante des résultats trouvés à propos des fonctions algébriques, on pourra, de la formule qui donne la différentielle d'un Logarithme, déduire quelques uns des résultats déjà

connues pour les fonctions algébriques.

Soit par exemple

$$y = u^m$$

u étant fonction d' x . En prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$\log y = m \log u$$

D'où

$$\frac{dy}{y} = m \frac{du}{u}$$

$$dy = \frac{m y}{u} du \\ = m u^{m-1} du.$$

résultat déjà trouvé.

Soit encore le produit

$$y = u.v.w$$

Si nous prenons les logarithmes des deux membres, comme les facteurs u, v, w peuvent être négatifs, nous pourrions avoir à considérer des symboles imaginaires. — Pour éviter cette difficulté, on élève les deux membres au carré. Il vient

$$y^2 = u^2 v^2 w^2$$

D'où

$$\log y^2 = \log u^2 + \log v^2 + \log w^2$$

$$\frac{d.y^2}{y^2} = \frac{d.u^2}{u^2} + \frac{d.v^2}{v^2} + \frac{d.w^2}{w^2}$$

ou

$$\frac{2y dy}{y^2} = \frac{2u du}{u^2} + \frac{2v dv}{v^2} + \frac{2w dw}{w^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}$$

Formule également connue.

Fonctions Exponentielles.

Soit

$$y = a^x$$

Prenant de part et d'autre les logarithmes Népériens, on a

$$x \, da = a \, dy$$

Différentions maintenant les deux membres en regardant y comme une fonction de x : on aura

$$\frac{dy}{y} = \frac{da}{a} \cdot dx$$

Donc

$$dy = y \frac{da}{a} \cdot dx \\ = a^x \frac{da}{a} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{da}{a} \quad (y = a^x).$$

Supposons qu'il s'agisse de

$$y = a^u$$

u étant une fonction quelconque de x . on aura

$$\frac{d \cdot a^u}{dx} = a^u \frac{da}{a} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dans le cas de $a = e$, il vient

$$\frac{d \cdot e^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

et si $u = x$

$$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x$$

Donc la dérivée de l'exponentielle népérienne e^x est égale à cette exponentielle elle-même.

on pourrait se proposer de trouver si l'exponentielle népérienne est la seule fonction qui jouisse de la propriété d'être égale à sa dérivée. — Soit

$$y = f(x)$$

une fonction remplissant cette condition. on doit alors avoir

$$\frac{d \cdot f(x)}{dx} = f(x)$$

D'où

$$d \cdot f(x) = f(x) \, dx$$

61.

$$\frac{d \cdot f(x)}{f(x)} = dx$$

Mais le premier membre est la différentielle de $\int f(x)$. Donc

$$\int f(x) = x + c'$$

cette constante c' est quelconque. on peut la poser égale à c .

Donc

$$\int f(x) = x + c$$

$$\int \frac{f(x)}{c} = x$$

Où

$$e^x = \frac{f(x)}{c}$$

$$f(x) = c \cdot e^x$$

ce qui prouve qu'en effet l'exponentielle Népérienne est la seule fonction qui soit égale à sa dérivée.

Puisque la dérivée de l'exponentielle Népérienne est si simple, il doit être utile dans certains cas de convertir une exponentielle quelconque en exponentielle Népérienne. Cherchons à le faire. Soit a^u une exponentielle quelconque. Posons

$$a^u = e^z$$

Où

$$u \cdot \ln a = z$$

Donc

$$a^u = e^{u \ln a}$$

Voici un exemple de l'utilité que présente cette transformation. Soit à différentier

$$y = u^v$$

u et v étant des fonctions de x . on aura

$$d \cdot u^v = d \cdot e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \cdot d \cdot v \ln u$$

ou

$$d \cdot v \ln u = v d \cdot \ln u + \ln u \cdot dv = v \frac{du}{u} + \ln u \cdot dv = \frac{v du + u \ln u \cdot dv}{u}$$

Par suite

$$d: u^v = e^{\frac{v \, du}{u}} = \frac{v \, du + u \, dv}{u} \\ = u^{v-1} (v \, du + u \, dv)$$

Remarque. - La forme de la dérivée d'un logarithme nous permettra de retrouver ici le théorème fondamental de la théorie des racines égales.

En effet, supposons-nous de différentier la fonction

$$y = \mathcal{L}.f(x) = \mathcal{L}.\{(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\}$$

on aura

$$y = n \mathcal{L}(x-a) + p \mathcal{L}(x-b) + q \mathcal{L}(x-c)$$

D'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x-a} + \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c}$$

Mais on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Donc

$$f'(x) = \frac{n f(x)}{x-a} + \frac{p f(x)}{x-b} + \frac{q f(x)}{x-c}$$

et l'on démontre ainsi que la dérivée d'une fonction est égale à la somme des quotients de la fonction par chacun de ses facteurs simples.

Differentiation des Fonctions Inverses.

Soit $y = f(x)$ une fonction : on peut supposer que ce soit à y que l'on donne des accroissements arbitraires, et que par suite x soit la variable indépendante, de sorte qu'on peut regarder x comme une fonction de y , $x = \varphi(y)$. - Or, quand on sait trouver la dérivée de l'une de ces fonctions, on peut facilement avoir celle de l'autre. En effet, si Δx et Δy sont deux accroissements correspondants de x et de y ,

et réciproquement l'une ou l'autre des Equations

$$y = f(x)$$

$$x = \varphi(y)$$

qui, en réalité reviennent au même, on aura indubitablement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

Cette Identité devra encore se vérifier à la limite, de façon qu'on pourra écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

ou bien

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Ce qui montre que

Les Dérivées de Deux fonctions Inverses sont les Inverses l'une de l'autre.

Comme exemple, voyons que

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x \log a}$$

on pourrait en déduire celle de la fonction Inverse, car. de

$$y = a^x$$

En effet, on a. de là

$$x = \log y$$

Donc

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \log a} = \frac{1}{a^x \log a}$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a$$

Fonctions Circulaires.

1°. Soit à prendre la dérivée de la fonction

$$y = \sin x$$

on aura

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

et, à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

2°. Soit

$$y = \cos x$$

on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{2 \sin(\frac{1}{2} \Delta x + x) \sin(-\frac{1}{2} \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \sin(x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Ce résultat a été trouvé directement, on pourrait encore le déduire du précédent. Car

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Donc

$$d. \cos x = d. \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{d(1 - \sin^2 x)}{2 \sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\frac{2 \sin x \cos x dx}{2 \cos x} = -\sin x dx$$

$$\frac{d. \cos x}{dx} = -\sin x \quad \text{eq. f. d.}$$

Enfin on peut arriver plus simplement encore. — Nous avons

$$\frac{d. \sin x}{dx} = \cos x$$

Donc

$$\frac{d. \sin x}{dx} = \cos x \cdot \frac{du}{dx}$$

Cela posé, je remarque que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Donc

$$\frac{d. \cos x}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -\sin x$$

Il est facile de se rendre compte de ce fait que les dérivées de $\sin x$ et de $\cos x$ sont de signes contraires, en remarquant que, dans le 1^{er} quadrant par ex. le sinus croît quand x croît, et le cosinus au contraire diminue.

3°. Soit

$$y = \tan x$$

on aura

$$d. \tan x = d. \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x d. \sin x - \sin x d. \cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d. \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Maintenant, on trouvera avec facilité

$$\frac{d. \sec x}{dx} = \tan x \sec x$$

$$\frac{d. \csc x}{dx} = -\cot x \csc x$$

$$\frac{d. \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Fonctions Circulaires Inverses.

Ce sont les fonctions de la forme

$$y = \arcsin x$$

Ces fonctions ne sont pas déterminées comme elles sont elles sont les inverses, car, à un même sinus par exemple, correspond une infinité d'arcs représentés par les deux formules

$$2k\pi + 2 \text{ et } (2k+1)\pi - 2$$

on peut préciser ici que la dérivée aura deux valeurs. Car,

33 Soit Différentie par x . les Deux arcs

$$y' = 2kx + 2$$

$$y'' = (2k+1)x - 2$$

on aura

$$dy' = d2$$

$$dy'' = -d2$$

Dans la Dérivée aura Deux Natures égales et Dignes Contraires.

Soit maintenant à Différentier

$$y = \arcsin x$$

on en tire

$$x = \sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et l'on saura, Dans chaque cas particulier, quel signe il faut prendre, puisque le Radical représente un Cosinus.

Soit

$$y = \arccos x$$

On a

$$x = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

on pourrait à priori prouver que les Dérivées de $\arcsin x$ et de $\arccos x$ doivent bien avoir un signe contraire, ce serait la même chose que pour $\sin x$ et $\cos x$. - on peut aussi voir d'avance que ces Deux Dérivées doivent toujours avoir même valeur absolue. - Dans cela, il suffit de prouver qu'on a toujours entre les arcs la relation

Car Delt on tire $\text{arc Cos } x \pm \text{arc Sin } x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$

$$d(\text{arc Cos } x) \pm d(\text{arc Sin } x) = 0$$

et les arcs dont les sinus et x sont

$$(1) \quad \begin{cases} 2k\pi + 2 \\ (2k+1)\pi - 2 \end{cases}$$

et arcs dont le cosinus est x sont

$$(2) \quad \begin{cases} 2k\pi + 2' \\ 2k\pi - 2' \end{cases}$$

2 et $2'$ étant $< \frac{\pi}{2}$ et étant liés par la relation

$$2 + 2' = \frac{\pi}{2}$$

or il est évident que si l'on prend une quelconque des formules (1) avec une des formules (2), on aura, en les ajoutant ou les retranchant suivant le cas, un résultat qui sera toujours de la forme

$$(2n+1) \frac{\pi}{2}$$

ce qui démontre la proposition.

Soit

$$y = \text{arc Tg } x$$

on a

$$x = \text{Tg } y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

on trouverait

$$\frac{d. \text{arc Cot } x}{dx} = - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d. \text{arc Sec } x}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d. \text{arc Cosec } x}{dx} = - \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

Comme application, cherchons à différencier l'expression

$$y = \arccos \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x} \quad a > b$$

Prenons, pour plus de commodité

$$u = \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x}$$

d'où nous avons

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{a+b \cos x}{\sqrt{a^2+b^2 \cos^2 x + 2ab \cos x - b^2 - a^2 \cos^2 x - 2ab \cos x}} = \frac{a+b \cos x}{\sin x \sqrt{a^2-b^2}}$$

et

$$\frac{du}{dx} = \frac{-a \sin x (a+b \cos x) + b \sin x (b+a \cos x)}{(a+b \cos x)^2} = -\frac{(a^2-b^2) \sin x}{(a+b \cos x)^2}$$

Ainsi, en substituant et réduisant,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b \cos x}$$

On voit tout de suite, dont on apercevrait difficilement l'intégrale.

Soit encore

$$y = \int \frac{b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}$$

Posons

$$\frac{b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x} = u$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{a+b \cos x}{b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\text{or } \frac{du}{dx} = \frac{b \sin x (b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}) + (\cos x \sqrt{b^2-a^2} - a \sin x) (a+b \cos x)}{(a+b \cos x)^2} = \frac{\sqrt{b^2-a^2} (b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2})}{(a+b \cos x)^2}$$

Substituant, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}$$

Cette dernière se différencie de la précédente que par le facteur $\sqrt{b^2-a^2}$. Donc l'intégrale de la première, multipliée par $\sqrt{b^2-a^2}$, doit être identiquement égale à celle de la seconde, multipliée par une constante arbitraire. Donc on doit avoir

$$\arccos \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \int \frac{b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x} + C$$

Cette égalité doit avoir lieu qq. soit x . Or, si l'on y fait $x=0$, on a $a=b+a \cos x$, donc $C=0$, et

$$(1) \arccos \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \int \frac{b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}$$

Soit u le plus petit des arcs représentable par le 1^{er} membre. Posons

$$\cos u = \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x}$$

et par suite

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u}} = \frac{1}{a+b \cos x} \sqrt{a^2+b^2 \cos^2 x - 2ab \cos x - b^2 - a^2 \cos^2 x + 2ab \cos x} = \frac{\sin x \sqrt{a^2-b^2}}{a+b \cos x}$$

Substituant dans l'éq. (1), on aura donc

$$u = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \int (\cos u + \sqrt{b^2-a^2} \sin u)$$

$$u \sqrt{b^2-a^2} = \int (\cos u + \sqrt{b^2-a^2} \sin u)$$

ce qui donne, par définition,

$$e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1} \sin u$$

formule remarquable, à laquelle nous arrivons bientôt par d'autres considérations.

Derivées et Différentielles des Divers ordres.

Soit

$$y = f(x)$$

on désigne la dérivée par

$$y' = f'(x)$$

La dérivée de $f'(x)$ s'appelle Seconde dérivée, et s'indique ainsi

$$y'' = f''(x)$$

et ainsi de suite.

La notation différentielle de y' était $\frac{dy}{dx}$, on écrit de là

$$f'(x) dx = dy$$

Si je différentie les deux membres, en supposant que dx soit un accroissement constant quel qu'il soit x , j'aurai

$$d(dy) = dx \cdot f''(x) dx$$

ce que l'on représente ainsi

$$d^2y = f''(x) dx^2$$

D'où

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

C'est la notation différentielle de la seconde dérivée. — on aurait de même

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

et ainsi de suite.

Si dx n'était pas un constant, c.à.d. si c'était une fonction variable avec x , on aurait eu

$$d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x$$

D'où

$$f''(x) = \frac{d^2y - f'(x) d^2x}{dx^2} = \frac{d^2y - \frac{dy}{dx} d^2x}{dx^2} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

et cette formule redviendrait $\frac{d^2y}{dx^2}$ si l'on suppose que dx est une constante.

on est conduit qqq. à supposer que dx n'est pas constant quand x varie. S'il s'agit de la trajectoire d'un mobile, x est une fonction du temps, $x = \varphi(t)$, et $dx = \varphi'(t) dt$. dx n'est donc pas une constante, à moins que $\varphi(t)$ ne soit une

une fonction linéaire: car alors $q'(t)$ serait constant, indépendamment de t , De sorte que t variant, dx ne changerait pas.

Considérons comme exemple quelques fonctions transcendantes:

Soit $y = e^x$: on aura

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \quad \frac{d^3y}{dx^3} = e^x \quad \frac{d^4y}{dx^4} = e^x \dots$$

Soit

$$y = a^x, \quad \frac{dy}{dx} = a^x \ln a \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\ln a)^2 \quad \dots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = a^x (\ln a)^n.$$

Soit

$$y = \sin x \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$$

ainsi, après 4 Dérivations Successives, on revient à la fonction primitive. Même résultat pour le Cosinus.

Pour la Tangente, le calcul n'apporte aucun résultat Remarquable.

Soit

$$y = \arcsin x$$

on a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ résultat algébrique pour le 1^{er} coefficient différentiel, et par suite pour tous les autres.

Fonctions Implicites.

Soit

$$u = f(x, y) = 0$$

y est une fonction Implicite de x qu'on peut représenter par

$$y = q(x)$$

De sorte qu'on a identiquement

$$f(x, q(x)) = 0$$

quel que soit x . Donc la différentielle du 1^{er} membre doit être nulle. Donc on aura, en différenciant d'après le théorème des fonctions de fonctions

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

et l'on a ainsi la dérivée $\frac{dy}{dx}$ sans être obligé de résoudre l'Eq. $f(x, y) = 0$.

Ce résultat est de la forme

$$(1) \quad M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

$M, N, \frac{dy}{dx}$ étant des fonctions de x et de y .

Cherchons maintenant $\frac{d^2y}{dx^2}$. Différentions l'Eq. (1): la différentielle du 1^{er} membre sera nulle, puisque ce 1^{er} membre est constant. — on aura donc, toujours d'après les propriétés des fonctions de fonctions,

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \left\{ \frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dy} \frac{dy}{dx} \right\} + N \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Eq. qui donnera $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Pour avoir $\frac{d^2y}{dx^2}$, on différencierait encore, et ainsi de suite.

Les Equations qu'on trouve ainsi, et qui donnent $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$... s'appellent Equations Différentielles Immédiates. — on nomme simplement Equations Différentielles celles qu'on obtient en éliminant un ou plusieurs paramètres arbitraires entre l'Eq. proposée et ses Eq. Différentielles Immédiates.

ainsi, soit l'Eq.

$$y^2 = 2mx + nx^2 \quad (1)$$

Différenciant, nous avons ses Eq. Différentielles Immédiates:

$$y \frac{dy}{dx} = m + nx \quad (2)$$

et

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = n \quad (3)$$

Si, entre ces 3 Equations, on élimine les constantes m et n , on aura

$$y^3 - 2xy \frac{dy}{dx} + yx^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

Eq. Différentielle du 2^d ordre.

on en auraient du 1^{er} ordre en éliminant m ou n entre les Equations (1) et (2).

Supposons maintenant qu'on cherche $\frac{dy}{dx}$, ayant les
Deux Equations

$$f(x, y, z) = 0$$

$$q(x, y, z) = 0$$

Dans chaque Eq. nous supposons y et z remplacés en fonc-
tion de x . - En différentiant, il viendra

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dq}{dz} \frac{dz}{dx} = 0$$

En éliminant $\frac{dz}{dx}$ entre ces Deux Equations, on en aura une
qui donnera $\frac{dy}{dx}$. - Les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ seront les
coefficients angulaires Des Tangentes aux projections De la
Courbe sur les plans Des xz et Des xy .

On arriverait de même s'il y avait n Equations entre
 $n+1$ Inconnues.

Série de Taylor.

On sait que, dans le cas des fonctions entières à une seule variable, on a toujours

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

Si $f(x)$ n'est pas une fonction entière, ce développement ne subsiste plus. — Cependant, on est naturellement conduit à l'appliquer à une fonction quelconque : et comme alors il ne subsisterait pas, on devra chercher l'expression du reste R , i. e. du terme complémentaire qu'on devra écrire à la suite du dernier considéré, pour que le 2^d. membre représente exactement la valeur du 1^{er}.

Faisons donc en toute généralité

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + R$$

et calculons R : nous devons trouver une quantité qui deviendra nulle pour le cas des fonctions entières.

Je pose

$$x+h = z$$

D'où

$$h = z - x$$

alors j'aurai

$$R = f(z) - f(x) - (z-x) f'(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2} f''(x) - \dots - \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

R est donc une fonction de x et de z : et remarquons que z et x sont complètement indépendants l'un de l'autre : Je puis faire varier x en considérant z comme constant, et vice versa. — Cela posé, je puis donc prendre la dérivée du second membre par rapport à x . J'aurai :

$$\frac{dR}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} -f'(x) - (z-x)f''(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2} f'''(x) - \dots - \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} f^{(n+1)}(x) \\ + f'(x) + (z-x)f''(x) + \dots + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x) \end{array} \right\}$$

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} f^{(n+1)}(x) \quad (1)$$

Remarquons ici que, si la dérivée $(n+1)^e$ de $f(x)$ était une constante C , la dérivée de R deviendrait $-C \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n}$, et il serait facile de trouver R qui évidemment serait égal à la quantité $C \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$. En d'autres termes, on a l'identité

$$\frac{d}{dx} \left\{ C \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \right\} = -C \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} \quad (2)$$

Revenant à l'identité (2) de l'éq. (1) membre à membre, on aura

$$\frac{d}{dx} \left\{ R - C \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \right\} = \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} \{ C - f^{(n+1)}(x) \} \quad (3)$$

Je suppose ici, dans tous les raisonnements qui vont suivre, que $f^{(n+1)}(x)$ est une fonction finie pour toutes les valeurs de x que je considère. — alors, si j'imagine que x croisse d'une manière continue de x à z ($h > 0$), $f^{(n+1)}(x)$ prendra différentes valeurs finies. Soit M la plus grande et m la plus petite de ces valeurs. — Si, dans l'éq. (3) je remplace C (const. arbitraire) par M :

$$\frac{d}{dx} \left\{ R - M \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \right\} = \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} \{ M - f^{(n+1)}(x) \}$$

Le second membre sera évidemment positif pour toute valeur de x comprise entre x et z . Donc le premier le sera aussi. Or le 1^{er} membre est une dérivée. Si donc il reste positif, c'est que la fonction correspondante, $R - M \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$, est croissante de x à z . Mais, pour $x=z$, cette fonction se réduit à R , c.à.d. à zéro (car, en se reportant à la

valeur de R , on voit que $R=0$ pour $x=2$; or elle a été constamment en croissant ; donc, de x à 2 , elle était négative. Donc

$$R < M \frac{(2-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$$

Si de même, dans l'égalité (3), on remplaçait C par m , on trouverait par un raisonnement semblable,

$$R > m \frac{(2-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$$

ainsi on a déterminé, pour le cas de $h > 0$, deux limites qui comprennent R . Il est facile de voir que ces deux limites subsistent encore si $h < 0$. alors en effet $2 < x$, de sorte que x décroît de x à 2 , ou bien croît de 2 à x . revenant à la formule (3), et remplaçons encore C par M et m successivement ; et supposons d'abord n pair. Il vient

$$\frac{d}{dx} \left\{ R - M \frac{(2-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \right\} = \frac{(2-x)^n}{1.2 \dots n} \left\{ M - f^{(n)}(x) \right\}$$

Le second membre est > 0 , puisque n est pair. Donc le 1^{er} l'est aussi. Or l'unité, la fonction dont il est la dérivée, devra être croissante ; et comme elle est nulle pour $x=2$, elle sera positive de 2 à x . Donc

$$R > M \frac{(2-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$$

on verrait de même que

$$R < m \frac{(2-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$$

ainsi R reste toujours compris entre les mêmes limites déjà trouvées, seulement les signes $>$ et $<$ sont intervertis : cela tient à ce que $(2-x)^n$ devient négatif. — Si n est impair, on arrive au même résultat que pour $h > 0$.

Donc, en résumé, quel que soit le signe de h , R est toujours compris entre les deux limites.

$$M \frac{(x-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} + m \frac{(x-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$$

M est la plus grande, m la plus petite des valeurs que prend $f^{(n+1)}(x)$ quand x varie de x à $x+h$. - Je puis donc poser

$$R = \frac{(x-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} M_0(m, M)$$

$M_0(m, M)$ désignant une certaine valeur inconnue, Intermedi. d'entre ou moyenne entre m et M . — Ps j'ai supposé actuellement que $f^{(n+1)}(x)$ soit une fonction continue, cela voudra dire qu'elle passera, quand x ira de x à $x+h$, par toutes les nuances de grandeur comprises entre m et M .

Donc il existera une certaine valeur θ de x , que j'ai représenté par $x+\theta h$. ($0 < \theta < 1$), comprise entre x et $x+h$, pour laquelle $f^{(n+1)}(x)$ atteindra rigoureusement $M_0(m, M)$. J'aurai alors, en remplaçant $(x-x)$ par h ,

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

De sorte que la série de Taylor devient définitivement

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

Remarquons que cette formule n'est pas ici une série : c'est un polynôme limité. Elle suppose essentiellement que les dérivées $f^{(n+1)}(x)$ soit finie et continue de x à $x+h$.

Il est facile de voir d'ailleurs que c'est la seule condition nécessaire pour que la formule soit applicable. — Il suffit de constater pour cela si $f^{(n+1)}(x)$ étant une fonction finie et continue, toutes les dérivées précédentes le sont également.

ou en général

$$q(x+h) - q(x) = h \{ q'(x) + \varepsilon \}$$

Si $q'(x)$ est fini, $q(x)$ est continu. En effet, quand h converge vers zéro, le 2^e membre a zéro pour limite, puisque $q'(x)$ est fini. Donc le 1^{er} membre aussi. Donc $q(x)$ est continu. Donc si en général $F(x)$ est fini, $F^{p-1}(x)$ est aussi, et par suite $F^p(x)$, $F^{p+1}(x)$, etc. ainsi.

Pour que la série de Taylor soit vraie, il faut et il suffit que, de x à $x+h$, $f(x)$ soit fini et continu.

Si maintenant on suppose que ce terme complémentaire $\frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x+h)$ ait pour limite zéro quand n croît indéfiniment, alors on pourra poursuivre le développement jusqu'à l'infini, et $f(x+h)$ représentera rigoureusement la somme de la série ainsi formée.

Si au contraire la fonction $f(x)$ est telle que le terme complémentaire ne converge pas vers zéro, il est évident que le second membre ne pourrait être remplacé par la série quelconque on augmentant n jusqu'à l'infini, et négligeant $R: f(x+h)$ ne serait point la somme d'une série.

Il est donc extrêmement important de constater si R a zéro pour limite.

On car fort étendu, on s'en rendrait facilement que R a pour limite zéro, c'est celui où $f^{(n)}(x)$ reste fini quelque grand que soit n . - Pour démontrer qu'alors R décroît indéfiniment, il suffit de démontrer que $\frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$ a pour limite zéro. Or, si h est compris entre p et $p+1$, on a

$$\frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} = \frac{h^p}{1.2 \dots p} \cdot \frac{h}{p+1} \cdot \frac{h}{p+2} \dots \frac{h}{n+1}$$

$\frac{h^p}{1.2 \dots p}$ est une quantité finie, soit P . Tous les autres facteurs du 2^e membre sont < 1 , et si h est une fraction proprement dite plus grande que le plus grand d'entre eux, leur produit

soit plus petit que R répété autant de fois qu'il y a de facteurs, c.à.d. que R^{n-p} , et l'on aura

$$\frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} < P R^{n-p}$$

P est constant : R^{n-p} converge vers zéro quand n augmente indéfiniment. donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} = 0$ c.q.f.d.

Si nous prenons pour ex. pour $f(x)$, e^x , $\sin x$ ou $\cos x$, la formule de Taylor donnera un développement en série, puisque toutes les dérivées sont finies.

La condition que nous venons de trouver suffisante pour que $\lim R = 0$, n'est pas évidemment nécessaire; et il est facile de comprendre que R pourrait tendre vers zéro sans que $f^n(x)$ restât fini: car, en général, le coefficient numérique du reste tend vers zéro: si $f^n(x)$ était infini, on aurait donc la forme illusoire $R = 0 \cdot \infty$; donc R pourrait tendre vers zéro.

Le Reste de la série de Taylor peut encore se mettre sous deux autres formes. La première s'obtient aisément en dérivant

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x+h) - \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

ou en éliminant

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{1.2 \dots n} \{ f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) \}$$

Sous cette forme, on voit qu'on peut toujours rendre h aussi petit qu'on veut, quel que soit le rapport du reste au terme auquel on s'arrête, soit plus petit que toute quantité donnée, pourvu toutefois que la dérivée qui entre dans ce terme ne soit pas nulle. — En effet, ce rapport est $\frac{1}{f^{(n)}(x)} \{ f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) \}$

Si h tend vers zéro, $f^n(x+\theta h) - f^n(x)$ diminue indéfiniment.
Donc le rapport a bien zéro pour limite, si $f^n(x)$ n'est pas nul.

Enfin, il y a une 3^e forme Dérivée qui est utile à connaître. — C'est R est une certaine fonction de x . Je puis poser

$$R = q(x)$$

ou bien

$$R = q(z + \theta(x-z)) = q(z) + q'(z + \theta(x-z)) \times (x-z)$$

en développant d'après la 1^{re} formule de Taylor, et y faisant $n=0$. Mais $q(z)$ est nul : c'est ce que devient R quand $x=z$. Donc enfin

$$R = (x-z) q'(z + \theta(x-z))$$

Maintenant, on a vu, dans la démonstration de la formule, que $\frac{dR}{dx}$, c'est-à-dire $q'(x)$, était

$$q'(x) = - f^{n+1}(x) \frac{(x-z)^n}{1.2 \dots n}$$

Changerant x en $z + \theta(x-z)$ et multipliant les deux membres par $(x-z)$, on voit que le 1^{er} membre se réduit à R :

$$R = f^{n+1}(x + \theta(x-z)) \cdot \frac{\theta^n (z-x)^{n+1}}{1.2 \dots n}$$

ou

$$R = \frac{\theta^n h^{n+1}}{1.2 \dots n} f^{n+1}(x + (1-\theta)h)$$

car $z + \theta(x-z) = \theta x + z(1-\theta) = \theta x + (x+h)(1-\theta) = x + h(1-\theta)$.
Maintenant, $1-\theta$ est une fraction Dérivée, nature que θ .
Donc, en posant $1-\theta = \theta$, il vient

$$R = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^n}{1.2 \dots n} f^{n+1}(x + \theta, h)$$

et d'ailleurs il est évident qu'on peut omettre l'indice.

Donc, en résumé, les trois formes de la Série de Taylor sont:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \\ R = \frac{h^n}{n!} \{ f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x) \} \\ R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h) \end{array} \right.$$

voici maintenant une autre démonstration relative de Taylor, due à la
bonne par M^r. Lebesgue.

Soit

$$y = f(x)$$

Supposons que l'on change x en X et que y devienne Y , on aura

$$Y = f(X)$$

Donc

$$Y - y = f(X) - f(x)$$

Mais nous proposons de développer $Y - y$ suivant les puissances ascendantes de l'accroissement
 $X - x$, - on peut poser

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{f(X) - f(x)}{X - x} = P$$

ou

$$Y = y + P(X - x) \quad (1)$$

Cette Eq. est une identité, en y prenant pour X et x des quantités quelconques et
pour y et Y les valeurs $f(x)$ et $f(X)$ correspondantes. On peut donc considérer X et Y
comme constantes, et x et y comme variables. Donc, en différentiant, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} (X - x) - P = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2P}{dx^2} (X - x) - 2 \frac{dP}{dx} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^3P}{dx^3} (X - x) - 3 \frac{d^2P}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

$$\dots \dots \dots \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^nP}{dx^n} (X - x) - n \frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} = 0 \quad (n+1)$$

et encore

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}} (X - x) - (n+1) \frac{d^nP}{dx^n} = 0 \quad (n)$$

ajoutons toutes les Eq. (1) (2) ... (n+1) membre à membre, après les avoir
multipliés respectivement par $1, \frac{X-x}{1}, \frac{(X-x)^2}{2}, \dots, \frac{(X-x)^n}{n!}$. Il vient

$$Y = y + \frac{dy}{dx} (X - x) + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{(X-x)^2}{2!} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n} \frac{(X-x)^n}{n!} + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \frac{(X-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

La quantité $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ est inconnue; mais nous pourrions en évaluer deux limites, et
par conséquent en déduire deux limites de Y .

Considérons une fonction u ainsi composée

$$u = \left(C - \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \right) (X - x)^{n+1}$$

C étant une constante. - Supposons que pour C , on ait pu trouver une valeur C , telle
que, pour des valeurs de x comprises entre X et x , $\frac{du}{dx}$ soit toujours > 0 . Dans
ce cas, u est une fonction croissante. Mais, quand x deviendra égal à X , u sera nul.

Donc auparavant on était ≤ 0 , donc $\frac{d^{n+1}p}{dx^{n+1}} > C_1$, car $X-x$ était > 0 avant $x=X$.
 Si au contraire C_2 est tel que, si $x=X$, on ait $\frac{du}{dx} < 0$, il s'ensuit, et $\frac{d^{n+1}p}{dx^{n+1}} < C_2$.
 Si donc nous trouvons C_1 et C_2 d'après ces conditions, nous aurons les deux limites cherchées. Trouvons donc la valeur de $\frac{du}{dx}$. Nous aurons

$$\frac{du}{dx} = -\left(C - \frac{d^{n+1}p}{dx^{n+1}}\right)(X-x)^n(n+1) - \frac{d^{n+1}p}{dx^{n+1}}(X-x)^{n+1} = (X-x)^n \left\{ -(n+1)C + (n+1)\frac{d^{n+1}p}{dx^{n+1}} - (X-x)\frac{d^{n+2}p}{dx^{n+2}} \right\}$$

C'est maintenant que nous allons nous servir de l'éq. (2) pour simplifier $\frac{du}{dx}$. Il vient

$$\frac{du}{dx} = (X-x)^n \left\{ -(n+1)C + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \right\}$$

or, depuis x jusqu'à X , le facteur $(X-x)^n$ est > 0 . Donc il suffit de chercher une valeur de C qui rende le 2^e facteur > 0 dans l'intervalle demandé. Soit m la plus petite valeur que prend $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ dans l'intervalle, et déterminons C_1 d'après la condition

$$-(n+1)C_1 + m = 0$$

et cette valeur sera telle que $\frac{du}{dx}$ ne pourra pas être négatif dans l'intervalle. De même soit M la plus grande valeur de $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, et déterminons C_2 d'après l'éq.

$$-(n+1)C_2 + M = 0$$

on a ainsi, pour la deux limites

$$C_1 = \frac{m}{n+1} \quad C_2 = \frac{M}{n+1}$$

Si μ est une valeur intermédiaire entre m et M , il existera donc une valeur de μ , inconnue, telle qu'elle aura exactement $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{\mu}{n+1}$, et l'on pourra écrire

$$y = y + \frac{dy}{dx}(X-x) + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{(X-x)^2}{1.2} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n} \frac{(X-x)^n}{1.2 \dots n} + \mu \frac{(X-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

Série de Maclaurin.

Elle se déduit de celle de Taylor en faisant $x=0$ et changeant h en x . Il vient

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(0) + R \quad \begin{cases} R = \frac{x^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(\theta x) \\ R = \frac{x^n}{1.2 \dots n} \{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)\} \\ R = \frac{x^{n+1}}{1.2 \dots n} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) \end{cases}$$

application Des Séries De Taylor et Maclaurin
au Développement Des Fonctions.

La Série De Maclaurin est souvent très-commode, en ce qu'elle permet d'exprimer une fonction quelconque suivant les puissances ascendantes De la Variable.

Si $f(x) = e^x$, la série De Maclaurin Donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Si $f(x) = \sin x$, on aura

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	Où $f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
...	...

et par conséquent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

on trouve De même

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

on aurait pu prévoir que, dans $\sin x$, il ne pouvait y avoir que Des puissances Impaires De x et Des puissances paires dans $\cos x$; car, si l'on change x en $-x$, le

le sinus change de signe, et le cosinus reste le même.

Dans sinus x , comme dans $\cos x$, il est évident que les termes successifs vont en diminuant indéfiniment. D'ailleurs les termes sont alternativement positifs et négatifs. Donc/venons quel'on connaît en l'arrêtant à un terme quelconque est plus petit que le terme suivant, et de signe contraire au dernier terme quel'on a pris.

on a trouvé

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

on peut déduire de là a^x . car

$$a^x = e^{x \log a}$$

Donc

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \frac{(x \log a)^3}{1.2.3} + \dots$$

Cherchons maintenant la Formule du Binôme pour un exposant quelconque. Nous aurons

$$(x+h)^m = x^m (1+y)^m \quad \text{si } \frac{h}{x} = y$$

Prenons actuellement

$$(1+y)^m = \varphi(y)$$

et cherchons à développer $\varphi(y)$ d'après la formule de Mac-laurin. Nous aurons

$$\varphi(y) = \varphi(0) + y \varphi'(0) + \dots + \frac{y^n}{1.2 \dots n} \varphi^{(n)}(0) + \frac{y^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \varphi^{(n+1)}(0y)$$

Ce qui revient à

$$(1+y)^m = \varphi(y) = 1 + \frac{m}{1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} y^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots n} y^n + R$$

et, d'après la 1^{re} forme du reste,

$$R = \frac{m(m-1) \dots (m-n)}{1.2 \dots (n+1)} \cdot \frac{y^{n+1}}{(1+\theta y)^{n+1-m}}$$

Quelle est la condition pour que l'on soit en droit de prolonger indéfiniment la série des premiers termes de $(1+y)^m$? C'est d'abord que la série soit convergente, puis, que le terme R converge vers zéro quand n augmente.

indéfiniment. Si y est < 1 , on sait que la série est convergente; sinon, elle est divergente. — Donc il faut déjà que y soit compris entre -1 et $+1$. Mais maintenant, cela ne suffit pas: il faut voir si alors R diminue indéfiniment.

Il y a deux cas à considérer.

1°. $y > 0$. — alors R peut s'écrire

$$R = \frac{m(m-1) \dots (m-n) y^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \times \frac{1}{(1+\theta y)^{n+1-m}}$$

Le premier facteur tend vers zéro. Car il vient à

$$\frac{m(m-1) \dots (m-p+1) y^p}{1.2 \dots p} \cdot \frac{(m-p)y}{p+1} \cdot \frac{(m-p-1)y}{p+2} \dots \frac{(m-n)y}{n+1}$$

Je suppose que p soit extrêmement grand, mais fixe. alors $\frac{(m-p)y}{p+1}$ est très voisin de $-y$. Donc p pourra toujours être choisi assez grand pour que $\frac{(m-p)y}{p+1}$ soit $< k$, k étant < 1 . à fortiori les rapports suivants seront $< k$: Donc le 1^{er} facteur de R sera plus petit qu'un certain facteur constant multiplié par k^{n-p} , c.à.d. par une quantité qui a zéro pour limite.

Voyons maintenant pour le 2^d facteur. θ et y sont > 0 ; donc $\theta y > 0$. Donc $(1+\theta y)^{n+1-m}$ converge vers ∞ , ou tout au plus vers 1; θ convergerait vers zéro. Donc le 2^d facteur a pour limite zéro, q.à.f. 1: donc $\lim R = 0$.

2°. $y < 0$. — alors, le 1^{er} facteur tendrait toujours vers zéro, mais le second augmenterait indéfiniment. La démonstration précédente tombe donc en défaut.

ayons recours à la 3^e forme du reste. Nous aurons

$$R = \frac{m(m-1) \dots (m-n) (1-\theta)^n}{1.2 \dots n} \cdot \frac{y^{n+1}}{(1+\theta y)^{n+1-m}}$$

Comme y est < 0 , changeons y en $-y$: nous aurons, en valeur absolue,

$$R = \frac{m(m-1) \dots (m-n) (1-\theta)^n}{1.2 \dots n} \cdot \frac{y^{n+1}}{(1-\theta y)^{n+1-m}}$$

Le facteur $\frac{m(m-1) \dots (m-n) y^{n+1}}{1.2 \dots n}$ tend toujours vers zéro. Reste

Donc encore $\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta y)^{n+1-m}}$, ce qui peut s'écrire $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta y}\right)^n (1-\theta y)^{m-1}$.
 $\frac{1-\theta}{1-\theta y}$ est une fraction proprement dite. Donc la puissance n
 en prendra limite zéro, et dans tous les cas est < 1 . (Remarque né-
 cessaire, car cette fraction tend vers 1 si θ tend vers zéro);
 $(1-\theta y)^{m-1}$ est un facteur constant, on dit moins toujours fini.
 Donc enfin R converge vers zéro.

En résumé, pour y compris entre -1 et $+1$, on a

$$(1+y)^m = 1 + \frac{m}{1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} y^3 + \dots$$

ou écrit d'autre

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}h^2 + \dots$$

pour $\frac{h}{x}$ compris entre -1 et $+1$, c.à.d. $\frac{h}{x} > -1$ et $\frac{h}{x} < 1$,

Donc $x+h > 0$ et $x > h$.

Soit par exemple à développer

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Cela revient à $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

Désignons pour un instant l'exposant par m . Nous aurons

$$\frac{m}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{m-1}{2} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{m-2}{3} = -\frac{5}{6}, \quad \frac{m-3}{4} = -\frac{7}{8}, \dots$$

Donc la formule de MacLaurin donnera

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}x^n + \dots$$

Cela est vrai pour $x < 1$: car évidemment le reste irait en
 convergeant vers zéro. — Si $x=1$, on a $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \infty$, il n'y

a donc lieu à rien examiner. — on peut cependant voir

qu'alors la série est en effet divergente. Car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2n}$:

ce rapport tend vers 1 et est toujours < 1 : c'est un cas

de divergence. Mais posons $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+x}$, on trouve $x = \frac{1}{2n+1}$

Donc $nx = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}$. Donc le produit n'est pas plus

grand qu'une quantité k supérieure à 1. Donc la

sera et Divergente.

Soit à développer $L(x+h)$. on a

$$L(x+h) = L\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) = L.x(1+y) = L.x + L(1+y)$$

Donc donc

$$f(y) = L(1+y)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(y) = (1+y)^{-1}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(y) = -(1+y)^{-2}$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(y) = 1.2(1+y)^{-3}$$

Donc $f'''(0) = 1.2$

$$f^{IV}(y) = -1.2.3(1+y)^{-4}$$

$$f^{IV}(0) = -1.2.3$$

...

$$f^n(y) = \pm 1.2 \dots (n-1)(1+y)^{-n}$$

$$f^n(0) = \pm 1.2 \dots (n-1)$$

Donc enfin

$$L(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \pm \frac{y^n}{n} \mp \frac{y^{n+1}}{(n+1)(1+y)^{n+1}}$$

Quelle doit être la valeur de y pour que le 2^e membre puisse être réduit à la série? D'abord, la série doit être convergente, et pour cela, on sait que y doit être compris entre -1 et $+1$; il peut même être égal à 1 , mais non à -1 . — Cette première condition remplie, voyons si elle entraîne la convergence que le reste diminue indéfiniment.

Supposons d'abord $y > 0$. Le reste est $\frac{1}{n+1} \times \left(\frac{y}{1+y}\right)^{n+1}$; le 1^{er} facteur tend vers zéro, le 2^e aussi en général, et même pour $y=1$ ne tend pas vers 1; donc $\lim R = 0$, même pour $y=1$.

Supposons $y < 0$. En adoptant la 3^e forme du reste,

on aura

$$R = \frac{y^{n+1}}{1.2 \dots n} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{(1-\theta)^n y^{n+1}}{(1-\theta y)^{n+1}} = \left(\frac{1-\theta}{1-\theta y}\right)^n \times \frac{y}{1-\theta y}$$

et sous cette forme, on voit facilement que $\lim R = 0$, pour $y < 1$, mais non pour $y = 1$.

Donc enfin

$$(1) \quad L(y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \quad y^2 < 1$$

$$(2) \quad L(x+h) = Lx + \frac{h}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{x} \right)^3 - \dots \quad \frac{h^2}{x^2} < 1$$

Preprenons la série (1). Comme elle est peu convergente, on la transforme habituellement.

(voir pour ces Transformations l'Introduction au Calcul Différentiel de Lacroix).

Chaque fois, d'après ce qui précède, à trouver la limite des erreurs qu'introduit nécessairement l'emploi du Tableau de Callet pour les Logarithmes. — Supposons qu'on calcule $\text{Log } A$. Soit $A = 3458,35$ par exemple, on sait qu'on cherche $\text{Log } 3458,35$; puis on cherche la différence Tabulaire $\Delta = \text{Log } 3459 - \text{Log } 3458$, appelons h la fraction $0,35$. alors on écrit

$$1 : h :: \Delta : x$$

donc

$$x = h \Delta$$

De sorte qu'on multiplie la différence entre les nombres par la différence tabulaire. — Mais on sait que la proportion admise n'est pas vraie: seulement on voit en algèbre qu'elle approche de la vérité. — Autant plus que les nombres sont plus grands et h plus petit. — Révenons sur cette assertion. — Soit x un nombre, on a

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x+\theta h)$$

Donc

$$\text{Log}(x+h) - \text{Log } x = \frac{h \text{Log } e}{x+\theta h}$$

Pour $h=1$, le 1^{er} nombre est Δ , donc

$$\Delta = \frac{\text{Log } e}{x+\theta^1}$$

en appelant θ^1 ce que devient θ pour $h=1$. Révenant maintenant à trouver la limite des erreurs, il vient

$$\frac{\text{Log}(x+h) - \text{Log } x}{\Delta} = h \cdot \frac{x+\theta^1}{x+\theta h}$$

on montre donc bien que nous n'avons pas la proportion

$$\frac{\text{Log}(x+h) - \text{Log } x}{\Delta} = \frac{h}{1}$$

Pour avoir la limite des erreurs comme Δ , j'écris

$$\lim. \frac{x+\theta^1}{x+\theta h}$$

or, si j'ai fixé $\theta^1=1$ et $\theta=0$, j'aurai un résultat plus grand que $\frac{x+\theta^1}{x+\theta h}$, si j'aurai un résultat plus petit en faisant $\theta^1=0$ et $\theta=1$. Donc

$$\frac{x+1}{x} > \frac{x+\theta^1}{x+\theta h} > \frac{x}{x+1}$$

ou

$$1 + \frac{1}{x} > \frac{x+\theta^1}{x+\theta h} > 1 - \frac{1}{x}$$

Donc on peut poser

$$\frac{x+\theta^1}{x+\theta h} = 1 \pm \varepsilon$$

Donc

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{\Delta} = h \pm h\epsilon$$

Donc

$$\log(x+h) - \log x = \Delta h \pm \Delta h\epsilon$$

D'après la proportion admise, nous aurons $\log(x+h) - \log x = \Delta h$: Donc l'erreur est $\Delta h\epsilon$. Or h est < 1 , ϵ est plus petit que $\frac{1}{x}$. Quant à Δ , sa valeur est $\frac{\log x}{x+1}$. Or $\log x = 0,434294$. Donc $\log x < \frac{1}{2}$. Ailleurs $x+1 > x$. Donc on a $\Delta < \frac{1}{2x}$. Donc enfin

$$\Delta h\epsilon < \frac{1}{2x^2}$$

L'erreur est plus petite que la moitié de l'inverse du carré du nombre considéré. — et, dans les tables de Callet, on s'arrange toujours de façon que l'on ait $x > 10^4$. Donc l'erreur est $< \frac{1}{2 \cdot 10^8}$, ou plus petite que $\frac{1}{2}$ unité du huitième ordre décimal : donc les sept six décimaux, quel'on conserve, sont toujours exactes.

au contraire, quand, du logarithme, on remonte au nombre correspondant, c'est là qu'on cherche, et l'on voit de la proportion hypothétique

$$h = \frac{\log(x+h) - \log x}{\Delta}$$

tandis que l'égalité (A) donne

$$h = \frac{\log(x+h) - \log x}{\Delta} \pm h\epsilon$$

Donc l'erreur est $h\epsilon$. Donc cette erreur est plus petite que $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{10^4}$. Il semblerait d'après cela que l'on peut prendre 4 chiffres décimaux pour h : pourquoi donc en algèbre prend-on de ne jamais en prendre que 2 ? C'est que h n'est pas une division dont la forme ne soit connue qu'approximativement, et que, dans une pareille opération, on ne peut jamais espérer qu'on aura au quotient plus de chiffres exacts qu'il n'y en a au diviseur : or le diviseur est Δ , et les tables ne donnent souvent qu'une ou deux chiffres.

Soit à développer

$$f(x) = \arctan x$$

Nous aurons

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

Mais on n'aperçoit aucune loi dans la formation des dérivées successives, de sorte qu'on ne pourra former le terme général de la série.

L'introduction des quantités imaginaires dans le calcul est ici d'une très-grande utilité, et fait apercevoir la loi de formation des dérivées. — Posons

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1-x\sqrt{-1})(1+x\sqrt{-1})} = \frac{A}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{B}{1+x\sqrt{-1}}$$

on trouve facilement que $A = B = \frac{1}{2}$. De sorte qu'on peut écrire la dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left\{ (1-x\sqrt{-1})^{-1} + (1+x\sqrt{-1})^{-1} \right\}$$

Donc

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{-1}}{2} \left\{ (1-x\sqrt{-1})^{-2} - (1+x\sqrt{-1})^{-2} \right\}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2 (\sqrt{-1})^2}{2} \left\{ (1-x\sqrt{-1})^{-3} + (1+x\sqrt{-1})^{-3} \right\}$$

La loi est évidente, et l'on peut écrire

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{2} (\sqrt{-1})^{n-1} \left\{ (1-x\sqrt{-1})^{-n} - (-1)^n (1+x\sqrt{-1})^{-n} \right\}$$

Donc

$$f^{(n)}(0) = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{2} (\sqrt{-1})^{n-1} \left\{ 1 - (-1)^n \right\}$$

Si n est pair, $f^{(n)}(0)$ est nul; si n est impair, la quantité entre crochets devient 2, et il vient

$$f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \dots (n-1) (\sqrt{-1})^{n-1} \\ = 1 \cdot 2 \dots (n-1) (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Donc

$$f^{(n)}(0) = \mp 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$$

suivant que $n-1$ sera simplement ou doublement pair. — P. 1. Donc nous supposons n pair, nous aurons

$$\arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp R$$

et en général on a

$$R = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(\theta x)$$

Donc ici

$$R = \frac{x^n (\sqrt{-1})^{n-1}}{2n} \left\{ (1-\theta x \sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x \sqrt{-1})^{-n} \right\}$$

car $(-1)^n = 1$, n étant pair; — ou bien

$$R = \frac{x^n (-1)^{\frac{n}{2}}}{2n \sqrt{-1}} \left\{ (1-\theta x \sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x \sqrt{-1})^{-n} \right\}$$

$$= \pm \frac{x^n}{2n \sqrt{-1}} \left\{ (1-\theta x \sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x \sqrt{-1})^{-n} \right\}$$

Il s'agit maintenant de faire disparaître les Imaginaires. or on peut écrire ainsi le reste, en valeur absolue,

$$R = \frac{1}{2n\sqrt{-1}} \left\{ \left(\frac{x}{1-\theta x\sqrt{-1}} \right)^n - \left(\frac{x}{1+\theta x\sqrt{-1}} \right)^n \right\}$$

Il faut

$$\frac{x}{1-\theta x\sqrt{-1}} = \frac{x(1+\theta x\sqrt{-1})}{1+\theta^2 x^2} = \frac{x}{1+\theta^2 x^2} + \frac{\theta^2 x^2}{1+\theta^2 x^2} \sqrt{-1} = f \{ \cos q + \sqrt{-1} \sin q \}$$

et

$$f = \sqrt{\frac{x^2 + \theta^2 x^4}{(1+\theta^2 x^2)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+\theta^2 x^2}}$$

Maintenant, il est clair que l'on a

$$\frac{x}{1+\theta x\sqrt{-1}} = f \{ \cos q + \sqrt{-1} \sin q \}$$

De sorte que

$$R = \frac{f^n}{2n\sqrt{-1}} (\cos nq + \sqrt{-1} \sin nq - \cos nq + \sqrt{-1} \sin nq)$$

$$R = \frac{f^n}{n} \sin nq = \left(\frac{x}{\sqrt{1+\theta^2 x^2}} \right)^n \frac{\sin nq}{n}$$

Il n'y a donc plus d'imaginaires, et nous pouvons discuter. - D'abord, si nous considérons la série en elle-même, nous voyons que, pour qu'elle soit convergente, x doit être compris entre -1 et $+1$. - Cette condition remplie, si nous examinons le reste, nous voyons que $\frac{x}{\sqrt{1+\theta^2 x^2}}$ est une fraction dont la puissance n a deux pour limite, ou au moins est toujours inférieure à 1, car il peut se faire que x tende vers 1 et 0 vers 0; mais d'ailleurs, $\frac{\sin nq}{n}$ tend toujours vers zéro: donc, même pour $x \pm 1$, R diminue indéfiniment. Donc

$$\text{avec } \lg x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad x^2 \leq 1$$

Si $x=1$, on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Série qui converge, mais qu'on sait transformée.

Remarques sur la Série De Taylor et MacLaurin.

Quelquefois, pour $x=a$, une Dérivée De la fonction Devient Infinité. Si $f''(a) = \infty$, alors on Dit que la Série De Taylor est Infinité à partir De cette Dérivée Inclusive.

Supposons

$$f(x) = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{5}{2}} \psi(x)$$

Alors on a

$$f(a+h) = \varphi(a+h) + h^{\frac{5}{2}} \psi(a+h) \quad \text{quantité finie.}$$

et je forme les Deux premières Dérivées :

$$f'(x) = \varphi'(x) + \frac{5}{2}(x-a)^{\frac{3}{2}}\psi(x) + (x-a)^{\frac{5}{2}}\psi'(x)$$

quantité finie pour $x=a$.

$$f''(a) = \varphi''(a) + \frac{15}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}\psi(x) + \text{etc.}$$

quantité infinie pour $x=a$. - Donc, si nous voulons appli-
quer la Série De Taylor, tout ce que nous aurons le droit
d'écrire, c'est

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + h \{ f'(a+h) - f'(a) \}$$

Lemme.

1°. La Série De MacLaurin fournit le seul Développement possible D'une fonction suivant les puissances entières ascendantes De la variable.

2°. La Série De Taylor fournit le seul Développement possible D'une fonction suivant les puissances entières ascendantes D'accroissement De la variable.

Démonstration - le Démonstrer pour la Série De MacLaurin. - Supposons qu'on donne

$$(1) \quad f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

Il s'agit de prouver que

$$A = f(0)$$

$$B = f'(0)$$

$$C = \frac{1}{1.2} f''(0)$$

$$D = \frac{1}{1.2.3} f'''(0)$$

Pour le prouver, on dit souvent: développons $f(x)$ d'après la série de Maclaurin: nous aurons

$$(1) \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

Revenant membre à membre des égalités (1) et (2), il vient

$$0 = A - f(0) + (B - f'(0))x + \left(C - \frac{f''(0)}{1.2}\right)x^2 + \dots$$

Cela est vrai quel que soit x ; donc

$$A = f(0)$$

$$B = f'(0)$$

$$C = \frac{1}{1.2} f''(0)$$

Le raisonnement est bien exact: cependant, on pourrait objecter que, pour le faire, on admet plus que l'hypothèse: car l'hypothèse donne simplement le développement (1), mais rien ne dit que $f(x)$ soit effectivement développable d'après la série de Maclaurin. Pour répondre à cette difficulté, il faudrait être autorisé à différencier une série. Or il n'est pas évident que si je différencie la série $A + Bx + Cx^2 + \dots$ la série des dérivées représentera $f'(x)$: car on sait que, une série étant convergente, la série des dérivées peut

94.

sont bien être divergente. — Si cependant, si l'on différencie le 2^e membre de l'égalité (1), on a une nouvelle série

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$$

que l'on sait être convergente pour toutes les valeurs de x plus petites que celles pour lesquelles la première était elle-même convergente. — admettons comme raisonnable le fait presque évident que, si la seconde série est convergente, elle a pour somme $f'(x)$. alors

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots \quad x < \text{que dans } f(x).$$

Si je fais $x=0$, il vient $B = f'(0)$.

En différenciant encore

$$\frac{1}{1.2} f''(x) = C + 3Dx + \dots$$

et, faisant $x=0$

$$C = \frac{1}{1.2} f''(0)$$

et ainsi De suite. — D'ailleurs si, dans (1), je fais $x=0$, j'aurai

$$A = f(0)$$

Donc le théorème est démontré.

Même raisonnement pour la série de Taylor.

Des Symboles Imaginaires.

On sait que toute expression Imaginaire

$$a + b\sqrt{-1}$$

peut se mettre sous la forme

$$\rho (\cos q + \sqrt{-1} \sin q)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad q = \arctan \frac{b}{a}$$

on sait aussi que

$$(\cos q + \sqrt{-1} \sin q) (\cos q' + \sqrt{-1} \sin q') = \cos(q+q') + \sqrt{-1} \sin(q+q')$$

Enfin on connaît la formule de Moivre

$$(\cos q + \sqrt{-1} \sin q)^m = \cos mq + \sqrt{-1} \sin mq$$

Démonstrée vraie même pour le cas où $m = \frac{p}{q}$, ou $m = -m$.

Seulement, si $m = \frac{p}{q}$, le 2^d membre est simplement égal à l'une des q déterminations du 1^{er}. De sorte qu'alors, pour avoir une égalité absolue, on écrit

$$\begin{aligned} (\cos q + \sqrt{-1} \sin q)^{\frac{p}{q}} &= (\cos \frac{p}{q} q + \sqrt{-1} \sin \frac{p}{q} q) (\cos \frac{2kp\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{2kp\pi}{q}) \\ &= \cos \frac{pq + 2kp\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{pq + 2kp\pi}{q} \end{aligned}$$

Ces préliminaires rappelés, reprenons la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Comme la base ne contient que des termes positifs, je puis Intervertir l'ordre des termes, et écrire :

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3.4} + \dots\right) + \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4.5} + \dots\right)$$

Si maintenant je change x en $x\sqrt{-1}$, on voit que le 2^d. membre devient $\cos x + \sqrt{-1} \sin x$. Si donc je conviens de représenter par $e^{x\sqrt{-1}}$ ce que devient alors le 1^{er}. membre, j'aurai

$$(1) \quad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

ainsi : Par définition, $e^{x\sqrt{-1}}$ représente la valeur que prend e^x par le changement de x en $x\sqrt{-1}$, et par démonstration, cette valeur est $\cos x + \sqrt{-1} \sin x$.

Si je change x en $-x$, j'aurai

$$(2) \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Pour qu'il y ait une certaine utilité à introduire les exponentielles Imaginaires dans le Calcul, il faut que les règles établies pour les autres quantités subsistent encore pour elles-ci. - or il est facile de voir qu'il en est ainsi.

Multiplication. -- on a

$$e^{x\sqrt{-1}} e^{y\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x) (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1} \sin(x+y)$$

$$e^{x\sqrt{-1}} e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}} \quad \text{c.f.d.}$$

Division. -- clarifiée de la démonstration précédente.

De même pour les Puissances et les Racines.

ainsi, toutes les règles du Calcul ordinaire s'appliquent à ces quantités.

On emploie quelquefois encore le symbole suivant, qui est plus générale :

$$e^{x+y\sqrt{-1}}$$

et que nous définissons encore : C'est ce que devient e^x quand on y remplace x par $x+y\sqrt{-1}$. Il est facile de démontrer que cette valeur n'est autre chose que $e^x \times e^{y\sqrt{-1}}$. En effet

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

on

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \dots = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots\right) \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \dots\right)$$

Cela est une identité en x et en y . Donc si nous remplaçons y par $y\sqrt{-1}$, et j'aurai évidemment

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x \cdot e^{y\sqrt{-1}} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Il est évident que les règles du Calcul Différentiel s'appliquent également à ces Quantités puisque ces règles reposent elles-mêmes uniquement sur celles du Calcul algébrique. — Cependant, démontrons-le une fois directement. Soit à prendre

$$\frac{d}{dx} \cdot e^{u+v\sqrt{-1}} \quad u = \varphi(x) \quad v = \psi(x)$$

on a

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u (\cos v + \sqrt{-1} \sin v) = e^u \cos v + e^u \sqrt{-1} \sin v$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cdot e^{u+v\sqrt{-1}} &= e^u \cos v \frac{du}{dx} - e^u \sin v \frac{dv}{dx} + e^u \sqrt{-1} \sin v \frac{du}{dx} + e^u \sqrt{-1} \cos v \frac{dv}{dx} \\ &= e^u (\cos v + \sqrt{-1} \sin v) \left(\frac{du}{dx} + \sqrt{-1} \frac{dv}{dx} \right) \\ &= e^{u+v\sqrt{-1}} \left(\frac{du}{dx} + \sqrt{-1} \frac{dv}{dx} \right) \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Cherchons le Logarithme d'une expression Imaginaire
de la forme $a + b\sqrt{-1}$

i.e. Cherchons s'il est possible de satisfaire à l'égalité

$$\mathcal{L}(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$$

Ceci revient à

$$a + b\sqrt{-1} = e^{x + y\sqrt{-1}} = e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y)$$

ce qui se peut écrire aussi

$$e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y)$$

on tire de là

$$e^x = e^x$$

D'où

$$x = \mathcal{L} f$$

et ensuite

$$\begin{cases} \cos y = \cos y \\ \sin y = \sin y \end{cases}$$

D'où

$$y = y + 2k\pi$$

Donc enfin

$$\mathcal{L}(a + b\sqrt{-1}) = \mathcal{L} f + (2k\pi + y)\sqrt{-1}$$

Si $b=0$, il y a deux cas à distinguer, suivant que a est positif ou négatif: mais toujours on a

$$y = \arctan \frac{b}{a} = \arctan 0 = 0 + n\pi.$$

1°. $a > 0$. - alors $\arctan \frac{b}{a} = +0$: donc $y = 0$.

$$(\mathcal{L} a) = \mathcal{L} a + 2k\pi\sqrt{-1}$$

on voit donc qu'une quantité réelle et positive a une infinité de logarithmes, dont un seul réel.

2°. $a < 0$. alors, changeant a en $-a$, et observant que $\arctan \frac{b}{a} = -0$, d'où $y = \pi$, on a

$$(\mathcal{L}(-a)) = \mathcal{L}a + (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

Donc une quantité négative a aussi une infinité de logarithmes, tous imaginaires.

Si, dans cette dernière égalité, on fait $a=1$, on a

$$(\mathcal{L}(-1)) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

et, si $k=0$,

$$\mathcal{L}(-1) = \pi\sqrt{-1}$$

$$\pi = \frac{\mathcal{L}(-1)}{\sqrt{-1}}$$

Les Quantités Imaginaires Distent facilement Cosine et Sinus en fonction de Cosu et De sinus.

En effet, on a

$$(\text{Cos}u + \sqrt{-1} \text{Sin}u)^m = \text{Cos}mu + \sqrt{-1} \text{Sin}mu$$

Si l'on développe le 1^{er} membre d'après le Binôme de Newton, ce développement pourra être identifié à $\text{Cos}mu + \sqrt{-1} \text{Sin}mu$, et l'on voit que l'on trouvera ainsi

$$\text{Cos}mu = \text{Cos}^m u - \frac{m(m-1)}{1.2} \text{Cos}^{m-2} u \text{Sin}^2 u + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \text{Cos}^{m-4} u \text{Sin}^4 u - \dots$$

$$\text{Sin}mu = m \text{Cos}^{m-1} u \text{Sin}u - \frac{m(m-1)(m-3)}{1.2.4} \text{Cos}^{m-3} u \text{Sin}^3 u + \frac{m(m-1)\dots(m-5)}{1.2.3.4.5} \text{Cos}^{m-5} u \text{Sin}^5 u - \dots$$

On peut également trouver les formules Inverses. —
on a vu en effet que, si l'on pose

$$\left. \begin{aligned} e^{u\sqrt{-1}} &= u \\ e^{-u\sqrt{-1}} &= v \end{aligned} \right\} \text{ on a } \left\{ \begin{aligned} 2 \text{Cos}u &= u+v \\ 2\sqrt{-1} \text{Sin}u &= u-v \end{aligned} \right.$$

$$\text{Donc} \quad uv=1 \quad u^k + v^k = 2 \text{Cos}ku \quad u^k - v^k = 2\sqrt{-1} \text{Sin}ku$$

Cela posé, prenons

$$2 \cos x = u + v$$

et élevons les deux membres à la puissance m : il vient

$$2^m \cos^m x = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u^{m-2} v^2 + \dots + m v^{m-1} u + v^m$$

ou

$$2^m \cos^m x = (u + v)^m + m u v (u^{m-2} + v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \dots + \begin{cases} \frac{m(m-1) \dots (\frac{m}{2} + 1)}{1 \cdot 2 \dots \frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}} & m \text{ pair} \\ \frac{m(m-1) \dots (\frac{m-1}{2})}{1 \cdot 2 \dots \frac{m-1}{2}} u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} (u + v) & m \text{ impair} \end{cases}$$

Or, avant que m soit pair ou impair. — Mais cela se réduit évidemment de la manière suivante:

$$2^m \cos^m x = 2 \cos m x + 2 m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x + \dots + \begin{cases} \frac{m(m-1) \dots (\frac{m}{2} + 1)}{1 \cdot 2 \dots \frac{m}{2}} \cos x & m \text{ pair} \\ 2 \frac{m(m-1) \dots (\frac{m-1}{2})}{1 \cdot 2 \dots \frac{m-1}{2}} \cos x & m \text{ impair} \end{cases}$$

ou enfin

$$2^{m-1} \cos^m x = \cos m x + m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x + \dots + \begin{cases} \frac{m(m-1) \dots (\frac{m}{2} + 1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \dots \frac{m}{2}} \cos x & m \text{ pair} \\ \frac{m(m-1) \dots (\frac{m-1}{2})}{1 \cdot 2 \dots \frac{m-1}{2}} \cos x & m \text{ impair} \end{cases}$$

Et il est évident qu'on trouverait de même les formules analogues pour le Sinus.

Maxima et Minima.

Soit la fonction

$$y = f(x)$$

Je suppose que x croisse d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Si, dans ce cours des valeurs de x , on trouve une valeur $x = a$ telle que la valeur y correspondante de la fonction y soit plus grande - ou plus petite - que toutes les valeurs environnantes de cette même fonction, on dit que la valeur y est un Maximum - ou un Minimum.

Cette définition laisse entendre qu'une même fonction peut avoir un certain nombre de Maxima et de Minima.

L'analyse donne sur-le-champ un moyen de chercher les Maxima et les Minima. - Quand $f(x)$ est croissant, sa dérivée est positive: elle est négative si $f(x)$ décroît, et réciproquement. Si donc y passe par une valeur Maximum ou minimum, sa dérivée devra passer de positif au négatif, ou inversement, et par conséquent devra s'annuler ou passer par l'Infini pour la valeur de x correspondante. - Donc, réciproquement si l'on cherche toutes les valeurs de x qui peuvent rendre $\frac{dy}{dx}$ nul ou Infini, on aura toutes les valeurs auxquelles pourront correspondre des maxima ou des minima de la fonction: et si de plus on s'assure que, en passant par ces valeurs, la fonction, positive auparavant, devient négative, on sera sûr qu'il y a Maximum; - Minimum au contraire si c'est l'inverse qui se produit: et il n'y aura ni maximum ni minimum si le passage par 0 ou ∞ n'annonce aucun changement de signe dans la fonction dérivée.



La plupart du Temps, les changements de signe peuvent s'apercevoir sur la fonction dérivée elle-même. Soit

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$$

on trouve aisément

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-2)}{(x^2+x-1)^2}$$

Le dénominateur, étant au carré, ne peut changer de signe. D'ailleurs, les valeurs qui le rendent nul, et qui par conséquent rendent $\frac{dy}{dx}$ infini, ne peuvent pas changer de signe le Numérateur. Donc il est inutile de chercher des Maxima ou des Minima parmi ces valeurs. — Reste seulement

$$x(x-2) = 0$$

Donc

$$x = 0$$

$$x = 2$$

L'inspection du Numérateur montre que $\frac{dy}{dx}$ passe du positif au négatif quand x , croissant, atteint et dépasse 2; — Du négatif au positif quand x passe par 0: donc $x=0$ est une valeur à laquelle correspond un maximum de y , et $x=2$ une valeur à laquelle répond un minimum. — Si l'on construisait la Courbe, on saurait que $f(0)$, ou -1 , est une ordonnée maximum pour x voisin 0, et que, pour x voisin 2, on a une ordonnée minima, $f(2)$ ou $\frac{3}{5}$: c'est là où se précède souvent dans la construction du Courbe.

Considérons seulement, parmi les valeurs de x qui peuvent donner un maximum ou un minimum, celles qui ont été obtenues en égalant à zéro la 1^{re} dérivée, et montrons comment la discussion de ces valeurs est facilitée par l'emploi de la dérivée d'ordre supérieur.

Supposons que, pour $x=a$, y prenne une valeur

maximum, b . alors, $\frac{dy}{dx}$ aura pour zéro b positif ou négatif. Donc, on voit que

$$\text{pour } \left. \begin{array}{l} x = a-h \\ x = a \\ x = a+h \end{array} \right\} \text{ on a } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} > 0 \\ \frac{dy}{dx} = 0 \\ \frac{dy}{dx} < 0 \end{array} \right.$$

Donc $\frac{dy}{dx}$ est une fonction d'incrément aux environs de $x=a$. Donc, si on aura aussi $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ pour $x=a$. Ici, -proquement, si on a $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, $\frac{dy}{dx}$ étant nul, y passe par un maximum. car alors $\frac{dy}{dx}$ est une fonction d'incrément: comme elle est nulle pour $x=a$, elle sera positive pour $x=a-h$ et négative pour $x=a+h$: Donc $\frac{dy}{dx}$ passe de positif en négatif en passant par zéro; Donc $y=b$ est un maximum.

on verra absolument de même que si, pour $x=a$, y prend une valeur minima b , $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit être positif, et réciproquement.

Donc

$$x=a, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad \dots \text{Maximum} \\ \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad \dots \text{Minimum} \end{array} \right.$$

et réciproquement.

Mais maintenant, il pourrait se faire que $\frac{d^2y}{dx^2}$ fût nul. alors, le signe deviendrait incertain. alors il faudra considérer que, pour le Maximum, le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devra être - aux environs de $x=a$, c.à.d. pour $x=a-h$ et $x=a+h$.

Ainsi, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors maximum pour $x=a$: donc on doit avoir $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3y}{dx^3} < 0$. - En tournant de même, on verra qu'en général:

Pour qu'une fonction soit Maximum - ou Minimum
il faut et il suffit que la première dérivée qui ne s'annule
pas soit de signe positif, et Négative, - ou Positive.

Soit Maintenant

$$f(x, y) = 0$$

une Equation: comment trouvera-t-on les maxima et
minima de la fonction? Il suffit de remarquer que

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}$$

et l'on raisonne comme précédemment.

Voir pp. 399.

Formes Singulières Des fonctions.

Soit

$$q(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

une fonction qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$. — on a

$$q(x) F(x) = f(x)$$

Donc

$$q'(x) F(x) + q(x) F'(x) = f'(x)$$

Si j'écris $x=a$, $F(x)$ s'annule : donc

$$q(a) F'(a) = f'(a)$$

Donc

$$q(a) = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Si $f'(a)$ et $F'(a)$ s'annulent, on recommencerait.

Donc

Savoir valeur, pour $x=a$, d'une fraction qui devient $\frac{0}{0}$, est le rapport de deux premiers dérivés de même ordre qui ne s'annulent pas simultanément.

Soit maintenant

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ pour } x=a.$$

on a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

et cette fraction devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$. on rentre donc dans le cas précédent.

Soit

$$f(x) \cdot F(x) = 0 \times \infty \quad \text{pour } x=a.$$

on a

$$f(a) \cdot F(a) = \frac{f(a)}{\frac{1}{F(a)}}$$

qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$ on considère aussi qd. Des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Ils proviennent de la fonction

$$y = (F(x))^{f(x)}$$

pour $x=a$. - Si l'on prend les logarithmes Népériens, on a

$$\log y = f(x) \cdot \log F(x)$$

alors le 1^{er} membre deviendra $0 \times (-\infty)$, $\infty \times 0$ ou $0 \times \infty$;Donc on est ramené à l'un des cas précédents. - Or, on a $\log y$, on en déduit y .Ex. Soit $y(x) = (1-x) \log \frac{1}{2} \pi x$, 102on a $y(1) = 0 \cdot \infty$.

On trouve

$$y'(x) = \frac{1-x}{\left(\log \frac{1}{2} \pi x\right)^{-1}}$$

Le rapport des dérivées est

$$\frac{-1}{\left(\log \frac{1}{2} \pi x\right)^{-2} \times \frac{1}{\log \frac{1}{2} \pi x}}$$

Pour $x=1$ on trouve $\frac{1}{0 \cdot \infty}$. Mais on peut écrire

$$\frac{2 \log \frac{1}{2} \pi x \cot \frac{1}{2} \pi x}{\pi}$$

$$\text{ou } \frac{2 \sin \frac{1}{2} \pi x}{\pi}$$

qui devient $\frac{2}{\pi}$ pour $x=1$.

Voir les Compléments. p. 106. -

Voici quelques Exemples faciles.

1^o. Pour $x=0$

$$\frac{a - b^x}{x} = \log \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{\log \frac{1}{x}}{\cot x} = 0$$

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \quad , \quad \frac{\sin^2 x}{x - \frac{2}{3} \sin x} = \frac{3}{4}$$

2^o. Pour $x=1$

$$\frac{\log x}{x-1} = 1 \quad , \quad \frac{x-1}{x^x-1} = \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{x^{\frac{3}{2}}-1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - x+1} = -\frac{3}{2}$$

applications Géométriques.

Des Tangentes.

Voici les Compléments
p. 410.

Il nous ne reviendrons pas ici sur ce que le cours
de Mathématiques Spéciales a appris relativement aux Tangentes.
on sait seulement qu'une Tangente se détermine par
son équation, et que, Y et X étant les coordonnées
courantes de cette Tangente, x et y celles du point où
elle touche la courbe, son équation est

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x) = - \frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dy}} (X - x)$$

ce qui revient à

$$Y \frac{dt}{dy} + X \frac{dt}{dx} = y \frac{dt}{dy} + x \frac{dt}{dx}$$

Si au contraire la Tangente est menée par un point
 α, β intérieurs, on sait que le lieu qui passe par tous
les points de contact est donné par cette même équation.

$$\beta \frac{dt}{dy} + \alpha \frac{dt}{dx} = y \frac{dt}{dy} + x \frac{dt}{dx}$$

et l'on voit que le 2. membre s'abaisse au degré $m-1$.

Je rappellerai aussi les valeurs trouvées pour
la sous-Tangente et la Tangente, pour la sous-Nor-
male et la Normale :

$$S_n = y \frac{dy}{dx}$$

$$N = y \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1}$$

$$S_t = y \frac{dx}{dy}$$

$$T = y \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1}$$

Quant aux Tangentes en coordonnées Polaires, on a vu de même que la Tangente en un point (r, θ) d'une courbe se détermine par l'angle V qu'elle fait avec le Rayon vecteur en ce point, et que l'on a

$$\operatorname{Tg} V = r \operatorname{Lim} \frac{h}{R}$$

h étant l'accroissement de l'angle, et R celui du rayon vecteur. — Ce résultat revient à

$$\operatorname{Tg} V = r \frac{d\theta}{dr}$$

Observons ici qu'on peut dériver très simplement cette formule à l'aide du Calcul différentiel. — Si j'appelle α l'angle que fait la Tangente avec la perpendiculaire de la ligne fixe, j'aurai

$$v = \alpha - \theta$$

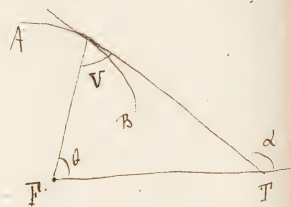
Donc

$$\operatorname{Tg} v = \frac{\operatorname{Tg} \alpha - \operatorname{Tg} \theta}{1 + \operatorname{Tg} \alpha \operatorname{Tg} \theta}$$

Si maintenant nous supposons pour un instant que la courbe soit rapportée à des axes rectangulaires se croisant en T , x et y étant les coordonnées de M , nous aurons

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \operatorname{Tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Donc



$$\operatorname{Ctg} \psi = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{x dy - y dx}{x dx + y dy}$$

ou en a

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Dans

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{Ctg} \theta$$

Différentiant

$$x dy + y dx = r dr$$

$$\frac{x dy - y dx}{r^2 \cos^2 \theta} = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$x dy - y dx = r^2 d\theta$$

Donc

$$\operatorname{Ctg} \psi = r \frac{d\theta}{dr}$$

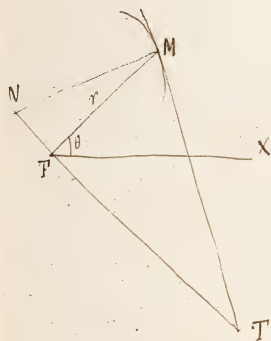
cyf. 2.

Maintenant, si MN est la Normale, et si NPT est prop. sur FM , PT et FN sont ce qu'on appelle la sous-tangente et la sous-normale en coordonnées polaires. Il est visible qu'on a

$$S_t = r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

$$S_n = \frac{dr}{d\theta}$$

Dans application, on verrait facilement que la sous-normale est constante dans la spirale d'Archimède $r = a\theta$, ainsi que la sous-tangente dans la spirale hyperbolique $r\theta = a$.



Voir les compléments
p. 4th.

Points Singuliers.

Vois auparavant le chap.
Concavité et Convexité des Courbes,

p. 417.

on appelle Points Singuliers dans une ou une courbe présente quelque circonstance remarquable qui ne dépend pas de la position des axes.

ainsi les points Maxima et Minima ne sont pas des points Singuliers, parce qu'ils changent généralement avec la position des axes.

Points Multiples.

Les points Multiples sont ceux par lesquels passent plusieurs branches de courbe qui n'en s'y arrêtent pas en général.

on peut distinguer les points doubles, triples... suivant qu'il y passe deux, trois... branches de courbe. - Si il n'en passe que deux, elle ne doivent pas s'y arrêter, pour que ce soit un point multiple.

Soit

$$(1) f(x, y) = 0$$

l'éq. rationnelle et entière d'une courbe algébrique. Comment trouvera-t-on ses points multiples, si elle en a ?

Naturellement, si l'éq. est résolue, et de la forme $y = \varphi(x)$, si il existe des points multiples, il devra en général y avoir plusieurs valeurs de y pour une même valeur d' x . Pour le point multiple, ces valeurs doivent être égales, sans que cependant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient pour cela égales à un plus petit nombre que d'ordinaire : car toutes les branches passant au point multiple doivent avoir des tangentes différentes en ce point. - Mais, pour plus

De Généralité, revenons à l'Eq. (1) non résolue. - Soit (α, β) un point multiple. $\frac{dy}{dx}$ (pour $x=\alpha, y=\beta$) doit avoir plusieurs valeurs. or, en général, $\frac{dy}{dx}$ est donnée par 1^{re} équation

$$(2) \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

or, cette Eq. est du 1^{er} Degré, et ne peut donc pas donner plusieurs valeurs pour $\frac{dy}{dx}$. donc elle doit être vérifiée. Elle même, et l'on doit avoir

$$(3) \quad \frac{df}{dx} = 0$$

$$(4) \quad \frac{df}{dy} = 0$$

Ces Eq. (3) et (4), ainsi que l'Eq. (1). Doivent coexister entre x et y . donc, en général, il n'y a pas de points multiples dans une courbe donnée. - Maintenant, quand on aura trouvé un couple de valeurs satisfaisant à ces 3 équations, il faudra reconnaître si, en ce point, il y aura effectivement plusieurs tangentes, et quelles elles sont. - Pour cela, on revient à l'Eq. (2) écrite ainsi:

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

et on la différencie:

$$(5) \quad \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dN}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{dN}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + N \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Le dernier terme est banni, puisque $N=0$. Cette Eq. est du 2^o Degré, et elle donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$, à moins toutefois que cette Eq. ne soit elle-même identique. alors, le point multiple serait au moins triple, et l'on différencierait encore. - Si l'Eq. (5) avait ses deux racines égales, les deux tangentes seraient confondues au point multiple. - Dans ce dernier cas, la méthode semble n'être pas rigoureuse, puisque le raisonnement

il s'agit sur ce que les Tangentes Devient être différentes.
 Mais cette Tangente commune représente véritablement deux
 droites superposées, que par conséquent on conceit Devrait être
 données par deux droites superposées avec l'eq. Du 2^e Degré
 ayant les Racines égales: cela fait comprendre pourquoi
 le raisonnement subsiste encore. Ailleurs, on peut l'imagi-
 ner qu'on altere infiniment par les coefficients de l'eq. (1)
 de manière que les deux Tangentes deviennent distinctes:
 alors, le raisonnement subsiste. Si maintenant les coeffi-
 cients alterés tendent de nouveau vers leurs valeurs primi-
 tives, l'eq. Du 2^e Degré ne cessera pas de donner les
 deux Tangentes: il en devra donc être encore de même
 à la limite.

Points d'Inflexion.

Théorème. — Lorsqu'une courbe est Concave vers
 l'axe des x , y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signes contraires.

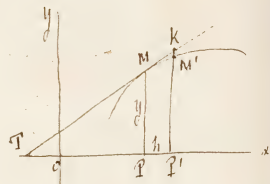
Remarque. D'abord que, dans ce cas, l'ordonnée $P'M$
 de la courbe est toujours plus petite en valeur absolue que
 l'ordonnée $P'K$ de la tangente en un point $M(x, y)$ infiniment
 voisin. Donc KM' doit toujours être > 0 , si l'on
 prend $KM' = P'K - P'M'$. Or

$$P'K = y + h \frac{dy}{dx}$$

$$P'M' = y + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x+th}$$

$$-(P'K - P'M') = -KM' = \frac{h^2}{1.2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x+th}$$

Si h devient indéfiniment, on voit donc bien que $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit
 être < 0 : et ici $y > 0$. — Si $y < 0$, on voit de même
 qu'on a $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$: donc c.q.f.d.



Théorème. - Lorsque une courbe est convexe vers l'axe des x , y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de même signe.

Même démonstration.

Théorème. - Réciproquement, lorsque y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signes contraires - ou de même signe - la courbe est concave - ou convexe vers l'axe des x .

Cela posé :

on admet qu'en un point m la courbe, d'abord concave vers l'axe des x , devient convexe, ou inversement : alors, au point m , il y a Inflexion, et ce qui coïncide la Tangente en ce point, c'est qu'elle traverse la courbe. Donc, en ce point, $\frac{d^2y}{dx^2}$, d'abord négatif, doit devenir positif, ou inversement : Donc il doit devenir nul, ou Infini, ou plus généralement Discontin. Les points déterminés par ces conditions sont donc ceux auxquels peuvent correspondre des Inflexions. on voit donc que cela revient à déterminer les maxima et minima de $\frac{dy}{dx}$: c'est du reste ce que montrerait facilement l'interprétation Géométrique des Théorèmes précédents. - Il faudra donc avoir recours à $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour savoir si il y a réellement Inflexion, et de quelle manière elle a lieu.

Rem. - on rencontre quelquefois cette expression : arc de Courbe convexe, d'une manière absolue. C'est un arc tel qu'une Droite ne peut le rencontrer en plus de deux points.

Il résulte de ce qui précède que

Pour qu'un arc soit convexe, il faut et il suffit que la Dérivée $\frac{dy}{dx}$ soit continue et toujours croissante

on s'aperçoit pour tous les points de la courbe appar-
tenant à cet arc.

Points de Rebroussement.

Le point de rebroussement est un point où deux
branches de courbe viennent se réunir et s'écarteront,
tout en y ayant la même tangente.

À l'abord, le point de rebroussement est un point
multiple. Donc on doit avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dx} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dy} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

on distingue des points de rebroussement de deux
espèces, suivant que les deux branches de courbe sont
de part et d'autre ou du même côté de la tangente.

dans le cas présent, que devra-t-il advenir de l'Eq. du
2^e Degré qui donnerait les deux tangentes (p. 111) ? Les
racines devront être égales.

Tout cela indique qu'il peut y avoir rebroussement;
mais cela peut être tout aussi bien un point multiple. — Il
faut de plus que l'ordonnée devienne Imaginaire quand
on fait varier x très-peu à droite ou à gauche du
point de rebroussement.

Maintenant, comment distinguera-t-on la première
espèce de rebroussement de la seconde ? C'est que, dans
le 1^{er} cas, une des branches sera convexe, l'autre concave

vers l'axe des x , ligne, dans le second, elles seront toutes les deux concaves ou toutes les deux convexes. ainsi, pour les rebroussements de première espèce, les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devront avoir des signes contraires, tandis que, pour les rebroussements de seconde espèce, elles devront être de même signe.

Pour application, on pourra considérer la courbe

$$y = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x)$$

qui présente un point de rebroussement au point dont l'abscisse est a .

on pourra aussi discuter la Lemniscate hyperbolique

$$(y^2 + x^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

qui est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du Centre d'une hyperbole équilatère sur ses Tangentes.

Points Conjugués ou Isolés.

Ce sont des points dont les coordonnées vérifient l'Eq. de la courbe, sans qu'aucun point voisin y satisfasse.

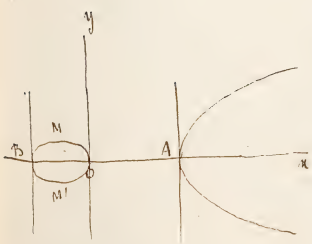
Supposons qu'on ait l'Eq.

$$y^2 = x(x-a)(x+b)$$

Où

$$y = \pm \sqrt{x(x-a)(x+b)}$$

a et b étant supposés positifs. Il est facile de voir que la courbe a essentiellement la forme représentée sur la figure, $OB = b$ en valeur absolue. Si maintenant on suppose que b diminue indéfiniment, la branche de



Courbe $OMM'B$ se réduit à l'origine, De sorte que l'Equation

$$y = x \sqrt{x-a}$$

représente une courbe pour laquelle l'origine est un point isolé. - on se rend bien compte ainsi De la manière Dont peuvent apparaître les points isolés.

Il est évident qu'en ces points, il n'y a pas de Tangente possible: Donc $\frac{dy}{dx}$ est Imaginaire. * Donc $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dx}{dy}$ doivent être nuls, puisqu'une Eq. Du 1^{er} Degré ne peut avoir de Racines Imaginaires, et l'Eq. Du 2^d. Degré à laquelle on a recours alors doit donner pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur impossible.

* fauss. Car la courbe
 $y = x \sqrt{x-a}$
 Donne $\frac{dy}{dx} = 0$ à l'orig.

Points d'arrêt.

Ce sont les points où s'arrête brusquement une branche unique de courbe.

Les courbes algébriques en Général n'offrent pas de points d'arrêt. Cependant, on en trouverait si l'on considérait des courbes dans l'Equation Desquelles il entre des Radicaux, et si l'on prenait les Radicaux avec un seul signe.

Mais, dans les courbes transcendentes, cela se présente quelquefois: Les courbes logarithmiques

$$y = \frac{1}{2x}$$

$$y = x \log x$$

présentent un point d'arrêt à l'origine.

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

et dans le même cas.

Points Saillants ou anguleux.

Ce sont des points où s'arrêtaient brusquement deux branches de courbe qui n'ont pas la même tangente.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ doit évidemment devenir discontinue quand on passe par un point saillant. C'est ce qui caractérise ces points.

Ces points sont des points multiples, et on les trouve 1^o même : 1^o qui les distingue des points de rebroussement, 2^o que 1^{re} Eq. Du 2^o. Degré qui donne la tangente n'a plus les deux racines égales.

Ces points sont aussi très-rare dans les courbes, et il n'y a guère que les courbes transcendantes qui en présentent.

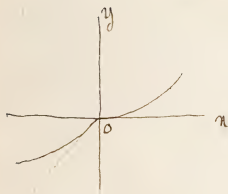
En.

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Si l'on fait $x=0$, on a $y=0$ soit que x converge vers zéro ou en restant positif ou négatif. — D'abord, si $x > 0$ tend vers zéro, alors $\frac{y}{x}$ tend vers 0 : donc la tangente est l'axe des x ; si $x < 0$ tend vers zéro, alors $\lim. \frac{y}{x} = 1$. Donc, au point 0, il y a deux branches qui ont des tangentes différentes.

De même pour $y = x \cdot \arctan \frac{1}{x}$.

Remarque Générale. — M^r Lanchy donne dans son analyse le moyen de reconnaître directement que, pour les points conjugués, anguleux, d'arrêt, de rebroussement, on a constamment les Eq. Simultanées :



$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{df}{dy} = 0 \quad f(x, y) = 0$$

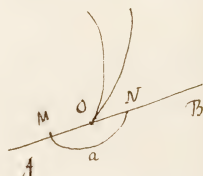
Nous avons déjà constaté pour les points multiples, les points anguleux et ceux de rebroussement. — Pour les points conjugués: il n'y a pas de tangente en ces points. Donc l'Eq. qui la donne doit devenir impossible. Donc $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ doivent être nuls, et l'Eq. du 2. degré, avoir ses racines imaginaires.

Démontrons directement que, dans les 2 cas en question, on a les 3 équations précédentes. — Nous supposons que $f(x, y)$ est continue dans le voisinage du point singulier O considéré. — Par le point O il sera toujours possible de mener une infinité de droites telles que d'un côté au moins de ces droites, et dans le voisinage du point O , il n'y ait pas de point de la courbe. On conclut de là que si, sur une de ces droites AO , de part et d'autre de O , on prend deux points M et N , $f(x, y)$ devra avoir des valeurs de même signe pour M et pour N : Car, si cela n'était pas, comme on peut mener de M à N un arc de courbe MAN qui ne rencontre pas la courbe proposée, on pourrait aller de M à N en suivant MAN , et la fonction $f(x, y)$ passant du positif au négatif, s'annulerait dans l'intervalle, et il y aurait sur MAN un point de la courbe. Donc $f(x, y)$ a le même signe pour M et pour N . Mais f est nul au point O : Donc, pour O , f est maximum ou minimum; donc sa dérivée est nulle, et

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Je le répète, pour les coordonnées du point O , quand on considère celles des différents points voisins de AO .

Mais, supposons que $y = ax + b$ soit l'Eq. de AO .



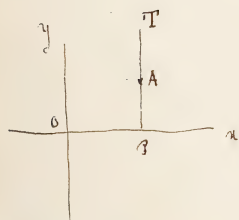
alors, dans l'eq. précédente, on a $\frac{dy}{dx} = a$. Donc on doit avoir

$$\frac{df}{dx} + a \frac{df}{dy} = 0$$

Mais cette équation devant avoir lieu pour une infinité de valeurs de a , il faut que

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{df}{dy} = 0$$

(cf p. 10.)



Il y a, dans la géométrie, des points singuliers, une cas particulière qui mérite une discussion spéciale, c'est celui où l'on a $\frac{dy}{dx} = \infty$. Cela veut dire qu'en ce point la tangente est parallèle à l'axe des y . Soit alors $y = f(x)$ l'eq. de la courbe, et $x = a$ l'abscisse du point singulier A . on considérera les valeurs de $f(a-h)$ et de $f(a+h)$.

alors, si $f(a-h)$ et $f(a+h)$ sont toutes deux réelles, et ont chacune une seule valeur: et si toutes deux sont $> f(a)$ ou $< f(a)$, il y a un point de rebroussement de 1^{re} espèce. — Si l'une est $> f(a)$ et l'autre $< f(a)$, il y a inflexion.

Supposons maintenant que $f(a-h)$ soit imaginaire, et que $f(a+h)$ ait deux valeurs réelles. Si elles sont toutes deux $> f(a)$ ou $< f(a)$, il y a rebroussement de 2^e espèce: si l'une est $> f(a)$ et l'autre $< f(a)$, il y a une simple limite de courbe, une abscisse maximum.

Enfin, si $f(a-h)$ est imaginaire et si $f(a+h)$ n'a qu'une seule valeur, il y a point d'arrêt.

Différentielle de l'aire
d'une courbe plane.

Soit Z l'aire.

on trouve facilement

$$dz = y dx.$$

Car $\Delta z = MM'PQ$, est compris entre $MP \cdot \Delta x$ et $M'P' \cdot \Delta x$,
deux parallélogrammes. Donc

$$MP < \frac{\Delta z}{\Delta x} < M'P'$$

$$\lim. \frac{\Delta z}{\Delta x} = MP$$

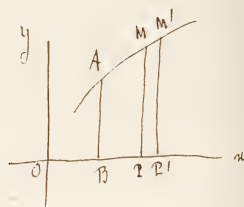
$$\frac{dz}{dx} = y \quad \text{cyp.s.}$$

Si les axes font l'angle θ , alors

$$dz = y \sin \theta dx.$$

En coordonnées polaires

$$dz = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



Voir p. 419.

Différentielle de l'arc d'une courbe plane.

Voit p. 121.

Place d'une courbe et la limite vers laquelle
tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite
quand le nombre des côtés augmente indéfiniment.

on trouve

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En coordonnées polaires :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Corollaire. -- Le rapport de l'arc à sa corde tend
vers l'unité.



$$\frac{\Delta s}{AB} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2}}}$$

$$\lim. \frac{\Delta s}{AB} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}} = 1$$

C'est pour cela que, dans toutes les théories du calcul
différentiel où il n'est traité que de limites de rapports,
on pourra remplacer la corde par l'arc, et réciproquement,
car ils ne diffèrent que d'un infiniment petit du
second ordre.

on peut même démontrer que

L'arc et sa corde ne diffèrent que d'un infi-
niment petit du troisième ordre.

Contact des Courbes Planes.

Définition. - Deux courbes ont un Contact de l'ordre n lorsque les n premières dérivées sont égales pour les coordonnées du point de Contact.

Il en résulte que la différence des ordonnées de deux points voisins qui ont même abscisse est un Infinitésimel petit de l'ordre $n+1$.

Admettons en effet que l'on ait

$$f(x) = f_1(x)$$

$$f'(x) = f_1'(x)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x)$$

alors

$$MM'' = \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \left\{ f^{(n+1)}(x) - f_1^{(n+1)}(x) + \varepsilon \right\} \quad \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \right.$$

Donc MM'' est un Infinitésimel petit de l'ordre $(n+1)^e$.

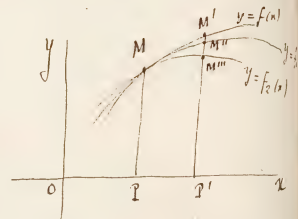
Quand ces propriétés sont remplies, le caractère géométrique des deux courbes, c'est que, dans le voisinage du point M , elles sont plus rapprochées l'une de l'autre que deux courbes pour lesquelles les conditions précédentes ne seraient pas remplies.

En effet, considérons les courbes MM' et MM'' pour lesquelles les p premières dérivées sont égales, $p < n$.

alors

$$MM''' = \frac{h^{p+1}}{1.2 \dots (p+1)} A \quad A \text{ est essentiellement fini.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{MM''}{MM'''} = 0$$



Donc $M'M''$ est infiniment plus grand que $M'M''$.
 eq. 17.

Le contact d'une tangente avec une courbe n'est que du 1^{er} ordre, parce que l'eq. d'une tangente n'a qu'une racine: la différence entre l'ordonnée de la tangente et celle de la courbe pour un point voisin est donc un infiniment petit du 2^d ordre.

à fortiori:

La distance d'une courbe à sa tangente est un infiniment petit du second ordre.

Il y a certaines tangentes où le contact est du 2^d ordre: par exemple, celles aux points d'inflexion, car alors $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour la courbe.

Théorème. - L'ordre du contact de deux courbes ne dépend pas de la position des axes.

En effet, le contact étant d'ordre n , $M'M''$ est d'ordre $n+1$: et je dis que $M'M''$ est du même ordre $n+1$.

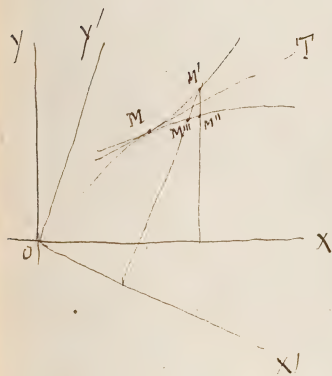
Car

$$\frac{M'M''}{M'M''} = \frac{\sin M''}{\sin M'}$$

or, à la limite, la corde $M'M''$ devient la tangente en M ; M'' devient l'angle de la tangente MT avec l'axe des Y' , et M' celui de la tangente avec l'axe des Y : donc

$$\lim. \frac{M'M''}{M'M''} = \frac{\sin(MT, Y')}{\sin(MT, Y)}$$

quantité finie, toutes les fois que l'axe des Y n'est pas parallèle à la tangente MT . avec cette condition, le théorème est donc démontré.



on peut considérer extrêmement le Contact Des Courbes, et
Dire :

Lorsqu'une courbe MB a un contact D'un certain
ordre n avec une autre courbe MA, on peut regarder MB
comme une position limite D'une autre courbe, laquelle
avait avec MA $(n+1)$ points communs qui se sont rappro-
chés l'un de l'autre jusqu'à se confondre en un Seul.

Supposons en effet une courbe MC ayant un point
commun M avec AB : on aura

$$y = f(x), y = f_1(x) : \quad f(x) = f_1(x) \quad (1)$$

Si l'on a un second M', on aura

$$f(x+h) = f_1(x+h)$$

ou

$$f(x) + h \{ f'(x) + \varepsilon \} = f_1(x) + h \{ f'_1(x) + \varepsilon' \}$$

et, à cause de (1)

$$f'(x) + \varepsilon = f'_1(x) + \varepsilon'$$

et si h tend vers zéro,

$$f'(x) = f'_1(x) \quad (2)$$

En poursuivant de même, on voit que l'énoncé est
Justifié.

Définition. - On dit qu'une courbe est Osculatrice
D'une autre courbe donnée, lorsqu'elle a avec celle-ci
le contact de l'ordre le plus élevé possible.

Soit

$$y = f(x)$$

une courbe complètement déterminée : et soit

$$y = q(a, a, b, c, \dots)$$

une autre courbe, où q est une fonction déterminée,
qui contient des paramètres. on peut se proposer de
déterminer ces paramètres de manière que cette ad-

courbe touche la première, et ont avec elle un contact d'ordre le plus élevé possible. - alors la 2^e sera osculatrice de la première.

ainsi, l'ordre de contact d'un cercle avec une courbe est au plus de Second ordre: car si l'eq. d'un cercle est de 2^e degré, et ne contient qu'une seule que deux inconnues.

Il faut en toujours déterminer le cercle osculateur d'une courbe en un point? Dans l'eq. du cercle, il y a trois paramètres. or on doit avoir

$$f(x) = q(x)$$

$$f'(x) = q'(x)$$

$$f''(x) = q''(x)$$

ce qui fait 3 équations entre 3 paramètres inconnus: donc le problème est possible en général.

La Parabole dans son équation générale, contient le paramètre: la parabole osculatrice aura donc avec une courbe quelconque un contact de 3^e ordre.

Voir p. 126.

En général, supposons qu'il faille établir un contact d'ordre n , et que p soit le nombre des paramètres arbitraires. Si $p > n+1$, il y aura une infinité de manières d'établir le contact; si $p = n+1$ il n'y en aura qu'une seule, et la 2^e courbe sera osculatrice de la 1^{re}; si $p < n+1$, le problème sera généralement impossible.

Il y a une différence essentielle entre les contacts d'ordre pair et ceux d'ordre Impair.

Dans les contacts d'ordre Impair, la 2^e courbe tangente

à la première reste d'un même côté de celle-ci ; au contraire, dans les contacts d'ordre pair, les deux courbes se coupent, se traversent mutuellement.

En effet, supposons que deux courbes, AMB et $A'MB'$ aient un contact d'ordre impair, du 3^e. par exemple. alors on a

$$y' - y = f_1(x+h) - f(x+h)$$

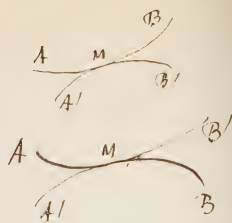
et en développant d'après la série de Taylor, comme
 $f_1(x) = f(x)$, $f_2'(x) = f'(x)$, $f_2''(x) = f''(x)$ et
 $f_3'''(x) = f'''(x)$, on a

$$y' - y = A \cdot h^4$$

et la différence des ordonnées $y' - y$ conserve le même signe, que h soit > 0 ou < 0 .

C'est le contraire pour les contacts d'ordre pair.

Par exemple : le cercle osculateur en un point d'une courbe, la traverse nécessairement.



Cercle Osculateur.

Cherchons les équations qui servent à déterminer le centre et le rayon du Cercle Osculateur.

Soit $y = f(x)$

l'éq. d'une courbe, et

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

l'éq. du cercle osculateur au point M : Cherchons α , β et R .

Désignons par p et q les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$.



Différentions l'éq. (1) :

$$(x-\alpha) + (y-\beta) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

on doit avoir $\frac{dy}{dx} = p$. donc

$$x-\alpha + p(y-\beta) = 0 \quad (3)$$

Différentions encore l'éq. (2); il vient

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

et par suite, comme on doit avoir $\frac{dy}{dx} = p$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = q$,

$$1 + p^2 + (y-\beta) q = 0 \quad (4)$$

Les équations (1), (2), (4) donneront α, β, R .

achèvement le calcul, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} y-\beta = -\frac{1+p^2}{q} \\ x-\alpha = \frac{p(1+p^2)}{q} \\ R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \end{array} \right.$$

Il est facile de voir d'après ces valeurs que le centre du cercle osculateur est toujours dans la concavité de la courbe. car on voit que $\beta-y$ est toujours du même signe que q ; donc que β est $>$ ou $<$ y selon que q est > 0 ou < 0 , c.à.d. selon que la courbe est convexe ou concave vers l'axe des x .

on appelle *Développée* d'une courbe le lieu géométrique des centres de ses cercles osculateurs.

Il est clair que l'Eq. de la développée s'obtiendra en éliminant x et y entre les 3 équations

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ (x - \alpha) + p(y - \beta) = 0 & (2) \\ 1 + p^2 + q(y - \beta) = 0 & (3) \end{cases}$$

Théorème. - Le centre du cercle osculateur est sur la Normale à la courbe.

Il est évident, puisque la courbe et le cercle ont même Tangente.

Théorème. - Le Rayon du cercle osculateur est Tangent à la développée.

En effet, différencions l'Eq. (2) en y considérant α et β comme variables. Il viendra

$$1 - \frac{d\alpha}{dx} + q(y - \beta) + p^2 - p \frac{d\beta}{dx} = 0$$

en vertu de l'Eq. (3) il restera

$$- \frac{d\alpha}{dx} - p \frac{d\beta}{dx} = 0$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{p} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Ainsi, il est évident qu'on pourrait différencier (2) par rapport à α et β comme seules variables. on aurait $-d\alpha - p d\beta = 0$ d'où $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{p}$. } il te semble mal.

Théorème. - La différence des rayons de deux cercles osculateurs est égale à l'arc de développée compris entre les centres correspondants.

En effet, prenons l'Eq.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (4)$$

Il s'agit que

$$dr = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$$

différencions l'Eq. (4) en considérant x comme variable indépendante.

on aura

$$(x-a)\left(1-\frac{da}{dx}\right) + (y-b)\left(p-\frac{db}{dx}\right) = p \frac{df}{dx}$$

Mais on a

$$(x-a) + p(y-b) = 0 \quad (2)$$

et il reste

$$(x-a) \frac{da}{dx} + (y-b) \frac{db}{dx} = -p \frac{df}{dx} \quad (5)$$

Il faut faire disparaître $x-a$, $y-b$ et p . — Or, en remplaçant dans l'éq. (2) p par la valeur tirée de

$$\frac{\frac{db}{dx}}{\frac{da}{dx}} = -\frac{1}{p}$$

elle devient

$$(x-a) \frac{db}{dx} - (y-b) \frac{da}{dx} = 0 \quad (6)$$

ajoutant les carrés des Equations (5) et (6), on a

$$\{(x-a)^2 + (y-b)^2\} \left\{ \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 \right\} = p^2 \left(\frac{df}{dx}\right)^2$$

Où

$$df = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ainsi, σ désignant l'arc de développée, on a

$$df = d\sigma$$

en intégrant

$$f = \sigma + k$$

De même

$$f' = \sigma' + k$$

Où

$$f - f' = \sigma - \sigma' \quad \text{c.f.p.}$$

Cela résout la description mécanique de la développante au moyen de la développée.

à une développée correspondent une infinité de développantes, évidemment équidistantes. — au contraire,

à une développante ne correspond qu'une seule développée.

avant de passer à une autre propriété des développées, il est nécessaire de dire quelques mots des Courbes Enveloppées.

Soit

$$f(x, y, a) = 0$$

une Equation contenant un Paramètre arbitraire. Si l'on donne à a une valeur déterminée, on aura une certaine Courbe; si on lui donne la valeur $a+h$, on aura une nouvelle Courbe différente, et coupant généralement la première en un point m , dont les coordonnées seront fournies par les deux Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, a) = 0 \\ f(x, y, a+h) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, a) = 0 \\ f(x, y, a+h) = 0 \end{array} \right.$$

et l'on aura le lieu des points m en éliminant a entre ces deux Equations, et faisant tendre h vers zéro. Or, dans le système des deux Eq. Simultanées, on peut remplacer l'une d'elles par

$$\frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = 0$$

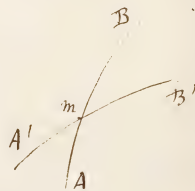
et, si h converge vers zéro, on a les deux Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, a) = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_a(x, y, a) = 0 \end{array} \right.$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ \frac{df}{da} = 0 \end{array} \right.$$



En éliminant a , on a le lieu.

Le lieu trace toutes les courbes Variables.

Soit PQ l'enveloppe, et M un de ses points. Je dis d'abord qu'en M passe une des courbes variables; cela est clair, car l'équation

$$f(x, y, a) = 0$$

donne évidemment une valeur de a correspondant aux coordonnées x et y du point M . — Maintenant, je dis qu'en M , l'enveloppe et la courbe variable ont même tangente. En effet, l'éq. précédente donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$$

Mais $\frac{df}{da} = 0$. Donc

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}} \quad \text{c. q. d.}$$

Théorème. — Le lieu des Tangentes successives des Normales à une courbe est la développée.

L'équation de la courbe est

$$f(x, y) = 0$$

Celle de la normale au point x, y

$$x - \alpha + p(y - \beta) = 0$$

La normale variant, le paramètre arbitraire est x ; quant à y , c'est une fonction de x donnée par la 1^{re} éq. On suppose que la 2^e peut être regardée comme ne contenant que α, β , et le paramètre x . Je fais donc éliminer x entre l'éq. de la Normale et sa dérivée par rapport à x , qui est

$$1 + p^2 + q(y-b) = 0$$

Donc si revient à un même q l'éliminer x et y entre les 3 équations

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ (x-a) + p(y-b) = 0 \\ 1 + p^2 + q(y-b) = 0 \end{cases}$$

ce qui donnera, on le sait, le développement.

Courbure des Courbes Planes.

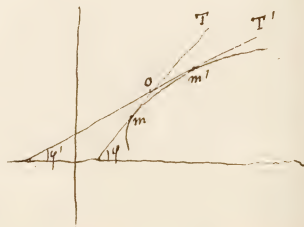
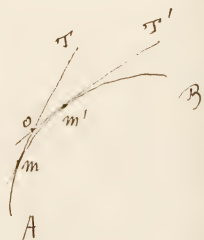
Soit AB une courbe plane quelconque, m et m' deux points voisins, mT et $m'T'$ les deux tangentes; il existe en général un certain rapport entre l'angle TOT' et l'arc mm' . Lorsque m' se rapproche de m , ce rapport change le plus souvent: car en général, l'angle TOT' ne varie pas proportionnellement à l'arc mm' et il n'y a que le cercle où cela soit vrai. — En général, ce rapport tend vers une certaine limite que l'on appelle la Courbure de la courbe au point m .

on appelle Rayon de Courbure le rayon d'un cercle qui aurait même courbure que la courbe au point m : et si l'on suppose ce cercle convenablement placé, tangent en m à la courbe, son centre étant dans la concavité, ce centre est le Centre de Courbure de la courbe.

Soit φ l'angle de la tangente avec l'axe des x .

on a

$$TOT' = \varphi - \varphi' = \Delta \varphi.$$



et comme arc. $mm' = \Delta s$,

$$\text{Courbure} = \lim. \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Dans le cercle, la courbure est $\frac{1}{R}$. Donc, si ρ est le rayon osculateur

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

Cet angle $d\varphi$ est l'angle de contingence.

or on sait que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$$

Donc

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi$$

Donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi \cos^2 \varphi$$

Mais $\operatorname{tg} \varphi = p$ et $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1+p^2}$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{1+p^2}$$

Mais

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2}$$

Donc

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi}$$

Donc le rayon de courbure d'une courbe en un point coïncide avec le rayon du cercle osculateur.

Le centre de courbure n'est donc autre chose que le centre du cercle osculateur.

En partant de la formule

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

on peut facilement trouver le rayon de courbure en coordonnées polaires.

on sait en effet que

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Si sur un arc ds , menons MN parallèle à MT' . on aura : (on mène aussi MP parallèle à OM') :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= OMN - OMT \\ &= OMT + PMN - OMT \\ &= \Delta\theta + OM'T' - OMT \\ &= \Delta\theta + v - v' \\ &= \Delta\theta + \Delta v\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta} = 1 + \frac{\Delta v}{\Delta\theta}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dv}{d\theta}$$

or

$$\tan v = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$$

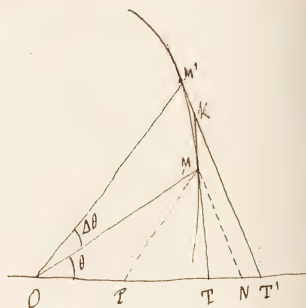
Donc, en différentiant,

$$\frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{dv}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

Donc



$$f = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{db^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{db}\right)^2 - r \frac{d^2r}{db^2}}$$

on peut encore y arriver par le Changement de Variable Indépendante.

Noté pour ce Changement de variable, p. 428.

application à quelques courbes, p. 434.

Cycloïde, p. 440.

Differentiation Des fonctions De plusieurs Variables p. 448.

Série De Taylor pour plusieurs Variables, --- p. 457.

Maxima et Minima Des fonctions De plusieurs Variables. p. 463.

Lignes à Double Courbure.

La tangente.

Soient M et N deux points voisins de la Courbe GH , et la sécante MNR . Menons le Plan MRM' . MRM' devient Tangent en M' en même temps que MR en M . Donc :

La projection de la Tangente à une Courbe est Tangente à la projection de cette Courbe.

On voit que ce résultat est tout-à-fait indépendant des angles des axes. Il sera le même si l'on prend des projections obliques.

Donc :

Si l'on prend les projections d'une courbe sur deux plans, et qu'on fait mener des Tangentes, on aura les Projections de la Tangente à la Courbe.

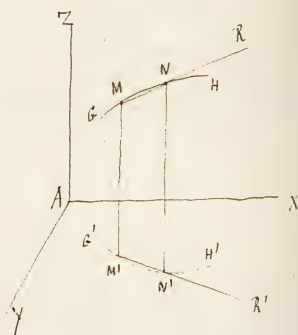
Supposons que les Equations de GH soient

$$y = \varphi(x)$$

$$z = \psi(x)$$

Soient x, y, z les coordonnées du point M par lequel la Tangente est menée, et x', y', z' les coordonnées correspondantes de la Tangente. Le point M' a pour coordonnées x', y' et $z' = 0$. En M' , menons la Tangente. Son Equation sera

$$(m) \quad y' - y = \frac{dy}{dx} (x' - x) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$



Voir p. 476.

C'est donc la une des Equations De la Tangente. - L'autre
serait de même

$$(n) \quad x' - x = \frac{dx}{dz} (x' - x) \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - \frac{dy^2}{dx^2}}$$

Plan Normal.

C'est un plan mené par le point de contact perpendicu-
lairement à la Tangente.

Supposons les plans coordonnées Rectangulaires. Le plan
Normal, devant passer par $M(x, y, z)$, aura une
Equation De la forme

$$x' - x = a(y' - y) + b(z' - z) \quad (1)$$

a et b étant des coefficients à trouver. - Or les traces
du plan Normal doivent être perpendiculaires avec pro-
jection De la Tangente. La trace sur le plan des xy
s'obtient en faisant $z' = 0$: c'est

$$x' - x = a(y' - y) - bz$$

Cette droite est telle que représente l'Eq. (m) doivent
se couper à angle droit. Donc

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{dy}{dx} = -1$$

$$a = - \frac{dy}{dx}$$

De même

$$b = - \frac{dz}{dx}$$

Donc l'Equation Du plan Normal devient :

$$(x'-x) dx + (y'-y) dy + (z'-z) dz = 0$$

Différentielle de l'arc.

Soit

$$AM = s = \int_1^x$$

cherchons ds . Nous admettons que la limite du rapport de l'arc infiniment petit à la corde est l'Unité.

Cela posé, il s'agit de trouver

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{\Delta x}$$

posons $\Delta x = h$. on a

$$\frac{s' - s}{h} = \frac{s' - s}{\text{Corde } MM'} \times \frac{\text{Corde } MM'}{h}$$

$$\lim \frac{s' - s}{h} = \lim \frac{\text{Corde } MM'}{h}$$

or

$$\text{Corde } MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

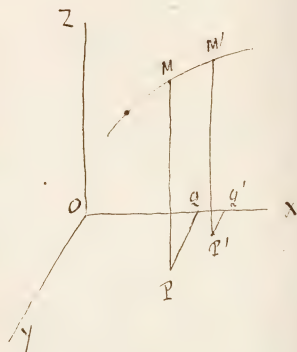
$$\frac{\text{Corde } MM'}{h} = \sqrt{1 + \left(\frac{y'-y}{h}\right)^2 + \left(\frac{z'-z}{h}\right)^2}$$

donc

$$\lim \frac{s' - s}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Cela a été trouvé en regardant x comme variable indépendante : mais, pour le 1^{er} ordre, le choix de la variable indépendante est arbitraire ; donc ici, elle est



Voir pp. 474.

indifférente.

Opérons, D'après cette valeur de ds , les angles que fait la tangente avec les axes.

on a

$$\cos M'MX' = \frac{MP}{MM'} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\cos \alpha}$$

et à la limite,

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

Ces valeurs, si l'on croit dans le sens MM' , correspondent à la partie de la tangente MP , dirigée dans le sens où les axes croissent: c'est facile à voir.

on peut déduire immédiatement de là l'équation du plan normal. — Soit MN une droite quelconque du plan normal passant par M . Les cosinus des angles de cette droite avec les axes sont

$$\frac{x' - x}{MN} \quad \frac{y' - y}{MN} \quad \frac{z' - z}{MN}$$

celle de la tangente

$$\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds}$$

les deux droites doivent former un angle droit. donc

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0$$

c'est l'éq. du plan normal.

Plan osculateur.

Si par trois points d'une courbe on fait passer un plan, et si l'on suppose que les points se rapprochent indéfiniment la limite du plan est le Plan osculateur.

C'est facile de le trouver.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M . Je supposerai que x, y, z soient fonction d'une même variable indépendante t . Pour M' , t deviendra $t + \theta$ et les coordonnées

$$x + M' \text{ seront } x + \frac{dx}{dt} \theta + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{\theta^2}{1.2} + \dots$$

$$y + \frac{dy}{dt} \theta + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{\theta^2}{1.2} + \dots$$

$$z + \frac{dz}{dt} \theta + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{\theta^2}{1.2} + \dots$$

Pour M'' je suppose que t devienne $t + 2\theta$; alors les coordonnées de M'' seront

$$x + \frac{dx}{dt} \cdot 2\theta + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot 2\theta^2 + \dots$$

$$y + \frac{dy}{dt} \cdot 2\theta + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot 2\theta^2 + \dots$$

$$z + \frac{dz}{dt} \cdot 2\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot 2\theta^2 + \dots$$

Cela posé, l'eq. Générale du plan est

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \quad (2)$$

Comme il passe par x, y, z , on aura

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

De plus, il passe par M' . Donc

$$Ax + By + Cz + D + \left\{ A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} + C \frac{dz}{dt} \right\} \theta + \left\{ A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{d^2z}{dt^2} \right\} \frac{\theta^2}{2} + \dots = 0 \quad (2)$$

Enfin il passe en M'' . Donc

$$Ax + By + Cz = 0 + \left\{ A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} + C \frac{dz}{dt} \right\} \theta + \left\{ A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{d^2z}{dt^2} \right\} \frac{\theta^2}{2} + \dots = 0 \quad (3)$$

Ces trois Equations Donnent évidemment, pour $\theta = 0$,

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 & (1) \\ A dx + B dy + C dz = 0 & (2) \\ A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0 & (3) \end{cases}$$

Ces 3 Equations Determinent les coefficients de l'Eq. Du plan Osculateur.

Prenant (1) de (2) on a

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0$$

Et les Eq. (2) et (3) Donnent $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$:

$$A = -C \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx d^2y - dy d^2x}$$

$$B = -C \frac{dx d^2z - dz d^2x}{dx d^2y - dy d^2x}$$

Donc enfin l'Equation Du Plan Osculateur est

$$(x' - x)(dy d^2z - dz d^2y) + (y' - y)(dx d^2z - dz d^2x) + (z' - z)(dx d^2y - dy d^2x) = 0$$

on peut encore la trouver immédiatement en faisant passer le plan par 3 points infiniment voisins

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x + dx & y + dy & z + dz \\ x + 2dx + d^2x & y + 2dy + d^2y & z + 2dz + d^2z \end{array}$$

Le plan prend maintenant

$$X = dy \, d^2x - dx \, d^2y$$

$$Y = dx \, d^2x - dx \, d^2z$$

$$Z = dx \, d^2y - dy \, d^2x$$

l'Eq. Du plan Osculateur s'écrira

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0$$

Cercle osculateur.

C'est le cercle qui passe par 3 points infiniment voisins. - Il est évident qu'il est dans le plan osculateur.

Cherchons son centre. - Supposons qu'on ait point mm' , mm'' , et deux axes milieux Des plans perpendiculaires qui se coupent suivant CD . Il est évident que le centre se trouvera sur CD .

Les points mm' Devient à la limite une Tangente. Donc le 1^{er} plan devient le plan normal, dont l'Equation est

$$(x'-x) dx + (y'-y) dy + (z'-z) dz = 0$$

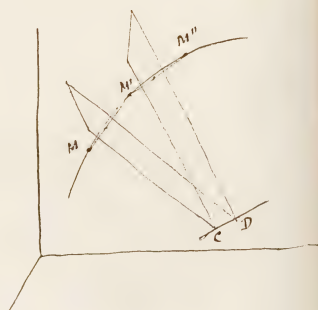
et à la limite, CD est dans ce plan. - En différentiant

cette Equation, nous aurons cette 2^e plan normal; et, en reportant regard en même temps à l'Eq. par son différentiel, on aura

$$(x'-x) d^2x + (y'-y) d^2y + (z'-z) d^2z - ds^2 = 0$$

en posant $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; Equation qui n'est pas celle Du 2^e plan normal, mais celle d'un plan contenant CD .

Combinant ces deux Equations avec celle Du ~~1^{er}~~ plan osculateur, on aura $x'-x$, $y'-y$ et $z'-z$, c.à.d. les



les différences entre les coordonnées du centre du cercle
milieu et celles de M. on trouve

$$u' - u = \frac{ds^2 (Y dx - Z dy)}{D}$$

$$y' - y = \frac{ds^2 (Z dx - X dy)}{D}$$

$$z' - z = \frac{ds^2 (X dy - Y dx)}{D}$$

en posant pour abréger

$$D = (Y dx - Z dy) d^2 x + (Z dx - X dy) d^2 y + (X dy - Y dx) d^2 z$$

Si je désigne par ρ rayon du cercle osculateur, j'aurai
Donc

$$\rho^2 = \frac{ds^4}{D^2} \{ (X dy - Y dx)^2 + (Z dx - X dy)^2 + (Y dx - Z dy)^2 \}$$

Il y a des simplifications importantes. En effet, remar-
quons d'abord que

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

cela se voit immédiatement en se reportant aux valeurs de
 X, Y et Z (et aussi par la géométrie). Maintenant, la
quantité entre crochets devient, en développant

$$\begin{aligned} & X^2 (dy^2 + dz^2 + dx^2) - X^2 dx^2 - 2XY dx dy \\ & + Y^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) - Y^2 dy^2 - 2YZ dy dz \\ & + Z^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) - Z^2 dz^2 - 2XZ dx dz \end{aligned}$$

ou

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) ds^2 - (X dx + Y dy + Z dz)^2$$

ou enfin

$$ds^2 (X^2 + Y^2 + Z^2)$$

Donc

$$f^2 = \frac{ds^6}{D^2} (X^2 + Y^2 + Z^2)$$

Puis D^2 se simplifie. or on a

$$\begin{aligned} D &= (X dy - Y dx) d^2 z + (Y dz - Z dy) d^2 x + (Z dx - X dz) d^2 y \\ &= X (dy d^2 z - dz d^2 y) + Y (dz d^2 x - dx d^2 z) + Z (dx d^2 y - dy d^2 x) \\ D &= X^2 + Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

et par suite

$$f^2 = \frac{ds^6}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Le Dénominateur peut prendre une autre forme. Car :

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= dx^2 (d^2 y^2 + d^2 z^2 + d^2 x^2) - dx^2 d^2 x^2 \\ &\quad + dy^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - dy^2 d^2 y^2 \\ &\quad + dz^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - dz^2 d^2 z^2 \\ &\quad - 2 dx dy d^2 x d^2 y - 2 dx dz d^2 x d^2 z - 2 dy dz d^2 y d^2 z \\ &= ds^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - (dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z)^2 \\ &= ds^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - ds^2 d^2 s^2 \\ &= ds^2 (d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2) \end{aligned}$$

Donc

$$f^2 = \frac{ds^4}{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2}$$

Dans ce calcul, le choix de la Variable indépendante est resté arbitraire. — Si l'on prenait pour variable indép.
— D'abord l'axe s , alors $d^2 s = 0$, et l'on a

$$\begin{aligned}
 X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= ds'^2 \left\{ d^2x'^2 + d^2y'^2 + d^2z'^2 \right\} \\
 &= ds'^2 \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right\} \\
 &= ds'^2 \left\{ \left(\frac{d \left(\frac{dx}{ds} \right)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d \left(\frac{dy}{ds} \right)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d \left(\frac{dz}{ds} \right)}{ds} \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Ainsi maintenant, quelle que soit la variable indépendante, les rapports des différentielles restent les mêmes : et comme, en substituant dans ds'^2 , ds^2 disparaît, on voit que, dans l'expression résultante,

$$S'^2 = \frac{ds'^2}{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2}$$

angle de Contingence,

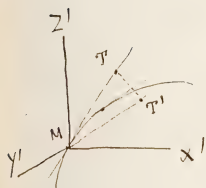
Rayon de Courbure.

on appelle angle de Contingence l'angle de la Tangente en un point et de la parallèle à la Tangente infiniment voisine.

Soit ϵ cet angle. Imaginons pour un instant qu'on place l'origine en M, et qu'on prenne $MT = MT' = 1$. alors les 3 coordonnées de T sont les 3 cosinus a, b, c des angles de MT avec les axes. Les coordonnées de T' sont $a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c$. Donc

$$\text{Cord. } TT' = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$$

$$\frac{\text{Cord. } TT'}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\Delta t} \right)^2}$$



Passons à la limite. au dérivéateur, la corde peut être rem-
placée par l'arc. Mais l'arc $T'T'$ mesure l'angle ε : c'est
à même pour convention. Donc

$$\varepsilon = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$$

Maintenant

$$a = \frac{dx}{ds}$$

$$b = \frac{dy}{ds}$$

$$c = \frac{dz}{ds}$$

Donc

$$(1) \quad \varepsilon = \sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}$$

c'est là la forme habituelle. — En développant:

$$\varepsilon = \frac{1}{ds^2} \sqrt{(ds dx - dx ds)^2 + (ds dy - dy ds)^2 + (ds dz - dz ds)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{ds^2} \sqrt{ds^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2ds dx (dx ds + dy ds + dz ds) + ds^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

Mais, en vertu de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, on a $ds dx = dx dx + dy dy + dz dz$

Donc il reste

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{1}{ds} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - ds^2}$$

Enfin, en remarquant que $ds dx = dx dx + dy dy + dz dz$, on
obtient aisément

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{1}{ds} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

X, Y, Z étant les coefficients du plan osculateur.

Rayon de Courbure. — C'est le Rayon d'un
cercle qui, on peut considérer, aurait même courbure
que la courbe: la courbure d'une courbe est $\lim \frac{\varepsilon}{ds}$.
Donc on a

$$f = \frac{ds}{\varepsilon}$$

on aura donc 3 expressions du Rayon de courbure,
par exemple

$$f = \frac{ds^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

on voit que c'est la même que celle du rayon du cercle osculateur.

Il coïncide avec lui, si on le place de manière qu'il ait même tangente que la courbe en M, et qu'il soit dans le plan osculateur. Son rayon est dirigé suivant la Normale Principale, c.à.d. celle qui est dans le plan osculateur.

Opérons encore les cosinus des angles que fait cette normale avec les axes. Sa direction est la limite de $T'T'$.

Les cosinus des angles de MT sont a b c

" " MT' $a+da$ $b+db$ $c+dc$

Projetons MTM' sur l'axe des x , et pourrions à volonté dans le sens $MT'T$. Nous aurons

$$a = a + da - \varepsilon \cos \lambda$$

$$da = \varepsilon \cos \lambda$$

$$\cos \lambda = \frac{da}{\varepsilon}$$

Donc

$$\cos \lambda = \frac{d \cdot \frac{da}{ds}}{\varepsilon}$$

De même

$$\cos \mu = \frac{d \cdot \frac{db}{ds}}{\varepsilon}$$

$$\cos \nu = \frac{d \cdot \frac{dc}{ds}}{\varepsilon}$$

valeurs auxquelles on donne souvent la forme

$$\cos \lambda = \int \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$\cos \mu = \int \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$\cos \nu = \int \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}$$

Quant aux coordonnées x', y', z' du centre, on a

$$\cos \lambda = \frac{x' - x}{r}$$

d'où

$$x' - x = \int \cos \lambda$$

et par suite

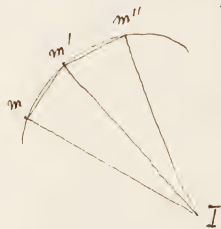
$$x' - x = \int^r \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$y' - y = \int^r \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$z' - z = \int^r \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}$$

Remarque. — on peut démontrer à priori que le cercle de courbure se confond avec le cercle osculateur. Considérons le plan $mm'm''$. Menons en m une perpendiculaire à mm' , et une à mm'' en m'' . Elles se coupent en I , de sorte que IM' sera le diamètre du cercle passant par m, m', m'' , soit $2r$ ce diamètre. Je dis que $\sin \sigma = \int$, ou $\sin \sigma = \frac{ds}{\epsilon}$. L'angle I est l'angle de mm' avec mm'' . Donc si j'appelle pour un instant ϵ , j'aurai

$$\epsilon = \frac{\text{arc de cercle } mm'm''}{2r}$$



149

ou

$$\frac{\xi}{\Delta t} = \frac{\frac{\text{arc de cercle } mm'm''}{\Delta t}}{2r}$$

Mais l'arc de cercle et l'arc de courbe ne diffèrent de leur corde commune que d'un infiniment petit du 2^e ordre.

Donc

$$\frac{\xi}{\Delta t} = \frac{\frac{\text{arc } mm'm''}{\Delta t}}{2r}$$

or arc $mm'm'' = mm' + m'm'' = \Delta s + (\Delta s + \Delta^2 s)$

Donc

$$\frac{\xi}{\Delta t} = \frac{\frac{2\Delta s + \Delta^2 s}{\Delta t}}{2r}$$

$$\frac{\xi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt}$$

$$\xi = \frac{ds}{r}$$

Donc

$$\lim r = \frac{ds}{\xi} = \rho \quad \text{c q f d.}$$

Il est bien évident d'ailleurs que l'angle que j'ai appelé ξ n'est pour autre chose que l'angle de contingence, puis-que les limites de mm' et de $m'm''$ sont les tangentes aux deux points infiniment voisins m et m' .

angle de Torsion

(1) est l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

on voit aisément qu'il est égal à l'angle De Contingence
 De l'arc De Rebrusement De la Surface Polaire (envelop.
 .pe Des plans Normaux).

en Angle (mis D'angle).

$$q = \frac{ds}{D^2} \left\{ dx(d^2y d^2z - d^2z d^2y) + dy(d^2z d^2x - d^2x d^2z) + dz(d^2x d^2y - d^2y d^2x) \right\}$$

D ayant même D valeur que précédemment.

Si x est pris pour variable indépendante, cette valeur se
 simplifie, mais n'est plus symétrique: elle devient

$$q = \frac{dx ds}{D^2} (d^2y d^2z - d^2z d^2y)$$

Now sp. 278 et suivantes, ce qui concerne
 l'angle De torsion, et diverses remarques.

application à l'Helice, sp. 277.

Surfaces.

Plan Tangent et Normale.

Si par un point d'une Surface on trace une courbe, quelconque, et qu'on lui mène une tangente, le lieu de ces tangentes est un plan qu'on appelle Plan Tangent à la surface.

Supposons que

$$z = f(x, y)$$

soit l'équation de la surface. Soit M un point de coordonnées x, y, z . Traçons une courbe qq. passant en M. Projérons la courbe sur le plan des xy : soit

$$y = \varphi(x)$$

l'équation de cette projection. La projection sur le plan des zx s'obtiendra en remplaçant y par $\varphi(x)$ dans l'éq. de la surface:

$$z = f(x, \varphi(x))$$

ainsi les équations de la courbe sont

$$y = \varphi(x)$$

$$z = f(x, \varphi(x))$$

Les équations de sa tangente en M sont donc:

$$y' - y = \frac{dy}{dx} (x' - x)$$

$$x' - x = \frac{dx}{dy} (x' - x)$$

et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = q'(x)$$

Pour avoir $\frac{dx}{dy}$, il faut différentier $x = f(x, q(x))$, on a bien $x = f(x, y)$ avec $y = q(x)$. on aura alors, en posant

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= p \\ \frac{dx}{dy} &= q \end{aligned} \right\} \text{ pour la surface.}$$

$\frac{dx}{dy} = p + q q'(x)$: et les équations de la tangente

$$y' - y = (x' - x) q'(x)$$

$$x' - x = (x' - x) \{p + q q'(x)\}$$

Si l'on élimine q' , on aura l'équation du lieu cherché. or cette élimination donne

$$x' - x = p(x' - x) + q(y' - y)$$

équation d'un plan, qui est le plan tangent.

Pour la Normale, les équations peuvent s'écrire

$$y' - y = a(x' - x)$$

$$x' - x = b(x' - x)$$

et il reste à trouver a et b . — La trace du plan tangent sur xy est

$$-x = p(x' - x) + q(y' - y)$$

son coefficient angulaire est $-\frac{p}{q}$. donc

$$a = \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$$

on trouve De même $b = -\frac{1}{p}$

Dans les Equations De la Normale sont

$$y' - y = \frac{q}{p} (x' - x)$$

$$z' - z = -\frac{1}{p} (x' - x)$$

elles ne sont pas symétriques. Mais, en prenant la 3^e projection, on prend les deux suivantes :

$$\begin{cases} y' - y + q (z' - z) = 0 \\ x' - x + p (z' - z) = 0 \end{cases}$$

ce sont celles qu'on emploie D'ordinaire.

Génération Des Surfaces.

Une surface Courbe est le lieu Des positions D'une Courbe qui se meut Dans l'espace suivant une loi quelconque, et en variant elle-même De forme en même temps que De position suivant une loi déterminée.

Pour traduire ces mouvements variés Dans l'analys., on suppose que la courbe Génératrice De la surface glisse le long D'un certain nombre D'autres courbes Directrices De son mouvement.

Supposons que les Eq. De la courbe Génératrice soient :

$$(1) \quad \begin{cases} F'(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ F_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

contenant n paramètres arbit. α, β, γ . Il doit y avoir entre ces paramètres $n-1$ relations

$$\varphi(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = 0$$

$$\varphi_1(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = 0$$

$$\dots$$

$$\varphi_{n-2}(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = 0$$

afin qu'il n'en reste plus qu'un d'arbitraire. alors la génératrice décrit un lieu parfaitement déterminé. Car on peut ramener les équations à ne plus contenir que le seul paramètre arbitraire α , et en lui donnant des valeurs particulières, on a autant de positions successives de la génératrice. Donc en éliminant α entre les deux équations ainsi préparées de la génératrice, on aura l'Eq. de la Surface.

Supposons au contraire que dans les équations de la génératrice il reste, tout calcul fait, deux paramètres α et β . En éliminant β , on aura

$$\pi(x, y, z, \alpha) = 0$$

qui représenterait une surface si α était constant. Mais α est arbitraire. Donc, α variant, cette surface varie indéfiniment de forme et de position. Donc en général on trouvera un solide embrassant tout l'espace.

Soyent par exemple les équations de la génératrice

$$\begin{cases} R = a \\ x^2 + (y-\beta)^2 = (z-a)^2 + R^2 \end{cases}$$

En éliminant a on obtient

$$x^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

Equation qui, pour chaque valeur de β , représente un cylindre parallèle à l'axe des z . Si β varie, on pourra donc le faire passer par un point quelconque de l'espace.

Si l'on a

$$\begin{cases} x - \beta = 0 \\ y^2 + (z-a)^2 = R^2 - \beta^2 \end{cases}$$

en éliminant β :

$$y^2 + (z-a)^2 + x^2 = R^2$$

Eq. qui représente une sphère de rayon fixe R et dont le centre est sur l'axe z à une hauteur a . Il est donc clair qu'on obtiendra un solide cylindrique indéfini de rayon de base R .

Pour avoir les équations de condition pour q , on prend les directrices.

Chaque directrice introduit une relation entre les paramètres. - Soient

$$(2) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Les équations d'une directrice. Les systèmes (1) et (2) doivent être vérifiés pour une même valeur de x, y et z . Donc si on les élimine, on aura une équation de

condition. - ainsi.

Si il y a n paramètres, il faut $n-1$ Directrices.
appliquons cela à quelques exemples.

Conoïdes.

Le Conoïde est engendré par une génératrice rectiligne glissant sur une directrice quelconque, en restant parallèle à un plan XOY par exemple et n'appuyant en outre sur une droite fixe que je supposerai être l'axe des z .

Si la droite fixe était parallèle au plan directeur, le conoïde deviendrait un plan: car la génératrice passerait par un point fixe de la courbe directrice, et s'appuyerait sur la droite.

Revenons au cas général. Les équations de la génératrice sont

$$\begin{cases} y = \alpha x \\ z = \beta \end{cases}$$

et celles de la directrice

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

entre ces 4 équations, il faut éliminer y , z et x . on aura un résultat de la forme

$$\beta = \varphi(\alpha)$$

Après à éliminer β et α entre cette équation et les deux premières. Il reste

$$(1) \quad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

C'est l'équation générale des conoïdes, q représentant une fonction arbitraire.

Le calcul différentiel conduit à une équation commune à tous les conoïdes, quelle que soit la fonction q . — Différentions (5) par rapport aux deux variables indépendantes x et y successivement. on aura

$$px = q' \left(\frac{y}{x} \right) \times \frac{-y}{x^2}$$

$$q = \frac{1}{x} q' \left(\frac{y}{x} \right)$$

Éliminant q' , on a

$$px + qy = 0$$

C'est l'équation cherchée.

Elle exprime une propriété du plan tangent: C'est que le plan tangent en un point M de la surface renferme la génératrice en ce point. Cela doit être évidemment d'après la définition même du plan tangent. Voici formellement l'équation générale du plan tangent et

$$x' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

x, y, z sont les coordonnées du point M . Il faut exprimer que ce plan renferme la génératrice. Il faut donc écrire que ce plan coupe l'axe des z en un point D ou D' . Soit z . or, en faisant $x' = y' = 0$, on a

$$z' = z - px - qy$$

et, comme on fait passer $z' = z$, il reste

$$px + qy = 0$$

cyf 62

Revenons à l'équation générale

$$x = q\left(\frac{y}{x}\right)$$

Supposons que, cette équation étant donnée, ainsi qu'une directrice, on demande de déterminer la fonction q d'après ces conditions. — Posons

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

il vient

$$x = q(\alpha)$$

Ces deux équations doivent subsister conjointement avec celle de la directrice. Éliminant x, y, z , on aura

$$\psi(\alpha, q(\alpha)) = 0$$

ψ étant une fonction connue, on aura de là $q(\alpha)$

$$q(\alpha) = \pi(\alpha)$$

Donc

$$x = \pi\left(\frac{y}{x}\right)$$

est l'équation demandée.

Cones.

Soit α, β, γ le sommet. Les équations de la génératrice
en seront

$$\begin{cases} y - \beta = a(x - \alpha) \\ z - \gamma = b(x - \alpha) \end{cases}$$

et celles de la directrice

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

éliminant x, y, z , on aura

$$b = q(a)$$

et par suite

$$\frac{z-y}{x-\alpha} = q \left(\frac{y-\beta}{x-\alpha} \right)$$

C'est l'équation Générale Des Cônes.

on trouve que l'équation Différentielle est

$$z-y = p(x-\alpha) + q(y-\beta)$$

qui se voit De plan Tangent en remarquant que ce plan passe au point α, β, γ .

Cylindres.

Leur équation Générale est

$$y - bz = q(x - az)$$

les équations De la Génération étant

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \alpha \text{ et } \beta \text{ paramètres.}$$

L'équation Différentielle est

$$(1) \quad ap + bq = 1$$

on peut la voir De + celle Du Plan Tangent qui doit contenir la génératrice au point De Contact. En effet, l'éq. Du plan Tangent est

$$x' - z = p(x' - \alpha) + q(y' - \beta)$$

La droite $\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases}$ doit être parallèle à ce plan. donc si l'on remplace x' et y' par az et bz , la valeur

De z que donnera l'Eq. Devra être infinie. Cette condition donne l'Eq. (10). — on peut encore dire: si par l'origine on mène une droite parallèle à la génératrice, et un plan parallèle au plan tangent, ce plan devra contenir cette droite.

Supposons qu'on donne l'équation

$$y - bz = c(x - az)$$

on voudrait que la surface cylindrique qu'elle représente fût circonscrite à une surface donnée. La question peut être ramenée à déterminer la courbe de contact, qu'on regarde comme la directrice du cylindre. — Cette courbe de contact est le lieu des points où le plan tangent aux deux surfaces est le même. Pour la surface donnée

$$f(x, y, z) = 0$$

l'Eq. du plan tangent est

$$(x' - x) \frac{df}{dx} + (y' - y) \frac{df}{dy} + (z' - z) \frac{df}{dz} = 0$$

Menons par l'origine une droite aux axes

$$\begin{cases} y = bz \\ x = az \end{cases}$$

cette droite est parallèle au plan précédent. Donc

$$(1) \quad a \frac{df}{dx} + b \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} = 0$$

Ceci est l'équation d'une surface qui contient la courbe de contact. Nous avons d'ailleurs

$$(2) \quad f(x, y, z) = 0$$

ce deux équations déterminent donc la courbe de contact.

on peut encore se poser cette
question :

l'équation

$$\bar{L} = 0$$

représente-t-elle un cylindre ? on a

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx} + p \frac{dL}{dy} = 0 \\ \frac{dL}{dy} + q \frac{dL}{dz} = 0 \end{cases}$$

Substituant dans (1)

$$a \frac{dL}{dx} + b \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} = 0$$

et l'on doit pouvoir choisir a et b
de façon que cette Eq. soit identique.

Reste à trouver la forme de la fonction φ . Posons

$$x - ax = z$$

alors

$$y - bz = \varphi(x)$$

Éliminons x, y, z entre ces équations et (1) et (4).

alors :

$$\varphi(x) = \pi(x)$$

Donc $\varphi = \pi$, et

$$y - bz = \pi(x - az)$$

soit l'équation demandée.

Surfaces De Révolution.

C'est le lieu des positions d'un cercle se mouvant dans
un plan perpendiculaire à son axe, en l'appuyant sur
une directrice, et en variant de rayon de manière que
son centre soit toujours sur l'axe fixe.

on trouve aisément que l'Eq. générale est

$$ax + by + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

pour l'axe quelconque, passant à l'origine ; et

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

pour l'axe confondu avec Oz .

Dans le même cas, l'équation aux différences partielles est

$$py - qx = 0.$$

on la trouve en remarquant que le plan tangent en
un point est perp. au plan méridien correspondant.

Conoides Généralisés.

Une Arête, parallèle à un plan Directeur XOY, s'appuie
sur Deux Directrices,

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ F_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

et

$$(2) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Les Equations de la Génératrice sont

$$(3) \quad \begin{cases} x = \gamma \\ y = \alpha x + \beta \end{cases}$$

Éliminons x, y, z entre (1) et (2), entre (2) et (3):

$$\beta = \varphi(\gamma)$$

$$\alpha = \varphi_1(\gamma)$$

Éliminant α, β, γ :

$$y = x \varphi_1(z) + \varphi(z)$$

ou, pour éviter les indices,

$$y = x \varphi(z) + \psi(z)$$

Si φ a Deux fonctions arbitraires. on ne pourra donc les
éliminer en général qu'en descendant au 3^e. ordre de
différentiation. Ici, le 2^e. suffit.

En différenciant une première fois, on aura:

$$0 = \varphi(z) + \{x \varphi'(z) + \psi'(z)\} \cdot p$$

$$1 = \{x \varphi'(z) + \psi'(z)\} \cdot q$$

De ces deux Equations, on tire

$$\frac{p}{q} = -q'(z)$$

et il n'y a plus qu'une fonction $q(z)$ à éliminer.

Différenciant encore, et posant :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dx dy} = s \\ \frac{dp}{dy} = \frac{d^2z}{dx dy} = s \end{array} \right| \quad \frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

on aura

$$\frac{qr - ps}{q^2} = -p q'(z)$$

$$\frac{qs - pt}{q^2} = -q q'(z)$$

D'où

$$q^2 r - 2 p q s + p^2 t = 0$$

Surfaces Développables.

Une Surface Développable est le lieu des positions d'une droite mobile, qui reste toujours tangente à une certaine courbe qu'on appelle la courbe de rebroussement ou la Caractéristique.

Soit MT une tangente mobile à la courbe

$$\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z) \end{cases}$$

Donnons nous le z Du point M . Soit $z = \alpha$. Les Equations de la Tangente seront

$$\begin{cases} x - q(\alpha) = (z - \alpha) q'(\alpha) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - \psi(\alpha) = (z - \alpha) \psi'(\alpha) & (2) \end{cases}$$

En éliminant z , on aurait l'équation de la surface. Mais ici, l'élimination n'est pas possible.

Si l'on veut avoir l'équation aux différences partielles, il suffit de différentier les Eq. (1) et (2) successivement par rapport à x et y . Nous aurons, z étant considéré comme fonction de x et y (car z est fonction de ces deux variables)

$$\begin{aligned} 1 - p q'(\alpha) &= \left\{ q'(\alpha) - q'(\alpha) - \alpha q''(\alpha) \frac{dz}{dx} \right\} \\ &= -\alpha q''(\alpha) \frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

De même

$$1 - p \psi'(\alpha) = -\alpha \psi''(\alpha) \frac{dz}{dy}$$

Divisant membre à membre

$$\frac{1 - p q'(\alpha)}{1 - p \psi'(\alpha)} = \frac{q''(\alpha)}{\psi''(\alpha)}$$

Donc j'ai

$$p = \lambda(\alpha)$$

Et immédiatement j'aurai semblablement

$$q = \chi(\alpha)$$

par suite

$$p = \pi(q)$$

Equation générale qui contient encore une fonction arbitraire π . Différenciant encore j'aurai

$$\begin{cases} r = s \pi'(q) \\ s = + \pi''(q) \end{cases}$$

et pour l'unité

$$rt - s^2 = 0$$

Caractère analytique commun à toutes les surfaces développables.

autre méthode. — La surface développable est telle que deux génératrices consécutives sont dans le même plan. Donc on peut la regarder comme le lieu des intersections successives d'un plan mobile qui se meut suivant une loi déterminée, pourvu qu'il ne reste qu'un paramètre arbitraire dans son équation. — Soit

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y$$

l'éq. du plan. Imposons-lui, par ex. la condition d'être normal à une courbe fixe. Son équation deviendra

$$(1) \quad z = \alpha + x q(\alpha) + y \psi'(\alpha)$$

Et si on veut chercher l'enveloppe. En différentiant, j'ai

$$(2) \quad 0 = 1 + x q'(\alpha) + y \psi''(\alpha)$$

Les équations (1) et (2) donneront la surface pour α éliminé. — ou elles donnent comme tout à l'heure

$$p = \pi'(q)$$

et le calcul s'achève de même.

Surfaces réglées quelconques.

Le cas le plus général est celui où une droite s'appuie constamment sur 3 directrices quelconques.

Les équations de la génératrice sont de la forme

$$y = \alpha x + \beta$$

$$z = \gamma x + \delta$$

Mais, nous avons avec cela trois équations de conditions,

De façon qu'il reste

$$\begin{cases} y = \alpha x + q(\alpha) & (1) \\ z = x \psi(\alpha) + \pi(\alpha) & (2) \end{cases}$$

Equations Définitives de la Génératrice. Il y a trois fonctions arbitraires. Cependant, nous Descendons un-Degré de 3^e ordre, on parvient à les éliminer.

voici la marche à suivre.

on différencie l'eq. (1) successivement par rapport à x et à y . En Divisant les Résultats, on obtient

$$\alpha = - \frac{\left(\frac{dq}{dx}\right)}{\left(\frac{dq}{dy}\right)} \quad (m)$$

faisant de même pour l'eq. (2), et ayant égard à l'eq. (m), on obtient

$$p + q \alpha = q'(\alpha) \quad (3)$$

restent α et $q(\alpha)$ à éliminer.

Différenciant en x et y , Divisant, et ayant égard à l'eq. (m) on a

$$1 + 2\alpha \alpha' + 4\alpha'^2 = 0 \quad (4)$$

Reste α . Différenciant en x et y , et Divisant, on obtient

$$-\alpha = \frac{u + 2\alpha \cdot u' + \alpha'^2 v}{v + 2\alpha w + \alpha'^2 u} \quad (5)$$

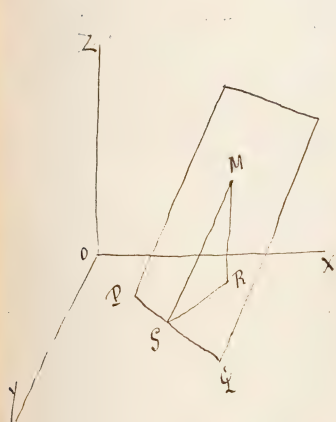
en posant

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = u \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = u' \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = w \quad \frac{d^3 z}{dy^3} = v$$

Si maintenant on élimine α entre les Equations (4) et (5), l'Equation finale, qu'on ne peut

devenir simplement, serait l'équation cherchée.

Lignes de Plus Grande pente.



Soit PQ un plan passant en M . abaissons MR perp. sur xy , de R une perpendiculaire sur PQ . L'angle MSR est le plus grand de ceux que peut faire avec le plan xy une ligne quelconque menée par M dans le plan PQ . Donc MS est la tangente à la ligne de plus grande pente. SR est la projection de la tangente MS . Donc c'est la tangente à la projection horizontale de la ligne de plus grande pente.

Cela posé, soient x, y, z les coordonnées du point M , et x', y', z' les coord. correspondantes. L'éq. du plan passant est

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

faisant $z' = 0$, j'aurai

$$y' - y = -\frac{p}{q}(x' - x) - \frac{z}{q}$$

C'est l'éq. de PQ . - D'autre part, l'éq. de la tangente SR est

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$$

Ces deux droites sont rectangulaires. Donc

$$p dy - q dx = 0 \quad (1)$$

conjoint avec l'éq. de plus grande pente. Si d'ailleurs l'éq. de la surface est

$$f(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

on voit que la ligne de plus grande pente sera complètement déterminée.

Dans le cas particulier des Surfaces de Révolution, dont l'équation est

$$p^2y - q^2x = 0$$

l'Eq. (1), c. ad.

$$p^2dy - q^2dx = 0$$

On vient

$$x dy - y dx = 0$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\log y = \log x + \log a \quad a = \text{const}$$

$$\log y = \log ax$$

$$y = ax$$

Ainsi les lignes de plus grande pente ont toujours pour projection sur xoy une droite passant à l'origine.

Lignes de Courbure.

Soient m et m' deux points voisins d'une surface.
Les normales en m et m' ne se rencontrent pas en général.
Les lignes qu'il faut suivre pour qu'elles se rencontrent
sont les lignes de courbure.

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface, et posons toujours

$$\begin{cases} dx = p dx + q dy \\ dp = r dx + s dy \\ dq = s dx + t dy \end{cases}$$

Les Equations de la Normale en $M(x, y, z)$ sont

$$\begin{cases} x' - x + p(z' - z) = 0 \\ y' - y + q(z' - z) = 0 \end{cases}$$

Soient $x+dx, y+dy, z+dz$ les coordonnées de M' , et supposons que la Normale en M' rencontre la perpendiculaire. — alors, en différentiant les 2 Equations perpendiculaires, par rapport à x et y comme variables, on aura

$$\begin{cases} -dx - p dx + (z' - z) dp = 0 \\ -dy - q dz + (z' - z) dq = 0 \end{cases}$$

Ces 2 Equations doivent avoir lieu en même temps pour le point de rencontre des deux Normales. — Eliminant $z' - z$ entre les deux dernières, on aura l'Equation de condition. Mais d'abord, remplaçons dx, dp et dq par leurs valeurs :

$$\begin{cases} -dx - p(p dx + q dy) + (z' - z)(r dx + s dy) = 0 \\ -dy - q(p dx + q dy) + (z' - z)(s dx + t dy) = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} (1+p^2) dx + p q dy - (z' - z)(r dx + s dy) = 0 \\ (1+q^2) dy + p q dx - (z' - z)(s dx + t dy) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\{(1+p^2) dx + p q dy\} (s dx + t dy) = \{(1+q^2) dy + p q dx\} (r dx + s dy)$$

Equation qui appartient aux lignes de courbure, ou du

men à leurs projections sur XOY . - Développant :

$$(c) \{ (1+p^2)s - pq\tau \} dx^2 + \{ (1+p^2)t - (1+q^2)s \} dx dy + \{ pq\tau - (1+q^2)s \} dy^2 = 0$$

Supposons qu'on ait résolu pour le rapport $\frac{dy}{dx}$: nous aurons deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, par exemple

$$\begin{cases} M dx + N dy = 0 \\ M_1 dx + N_1 dy = 0 \end{cases}$$

en intégrant, on trouve

$$\begin{cases} F = 0 \\ F_1 = 0 \end{cases}$$

et chacune, prise avec l'éq. De la surface, donne une infinité de lignes de courbure, puisque F et F_1 renferment nécessairement des constantes arbitraires amenées par l'intégration. - Nous aurons ainsi deux systèmes de lignes de courbure.

Ces lignes se coupent toutes à angle droit, quand elles appartiennent à deux systèmes différents.

En effet : Supposons pour un instant le plan XOY parallèle au plan Tangent au point O de rencontre A de deux lignes de courbure. alors $z' = z$, $p = q = 0$. Donc l'éq. (c) devient

$$s dx^2 + (t - r) dx dy - s dy^2 = 0$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{t-r}{s} \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

Donc les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont réelles et distinctes au signe près : donc les projections du Tangentes, et par suite les Tangentes, donc les lignes de courbure, sont rectangulaires.

Donne

Une surface quelconque étant donnée, on peut toujours la décomposer en une infinité de rectangles.

Def.

Les Rayons de courbure des ^{la surface} lignes de courbure sont les longueurs des Normales comprises, pour chaque ligne, entre le point M et la rencontre avec la Normale infiniment voisine menée le long d'une ligne de courbure. — Cherchons-les :

En effet, Soient x', y', z' les coordonnées de G ou de G'.

Nous aurons ($S = MG$)

$$S = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

ou bien

$$S^2 = (z'-z)^2 (1+p^2+q^2)$$

puisque $p = \frac{dx}{dz} = \frac{x'-x}{z'-z}$. Car la normale étant perpendiculaire sur la courbe, on a par exemple $\frac{y'-y}{z'-z} = -\frac{dx}{dy} = -q$.

Pour avoir S, écrivons ainsi les équations des projections des lignes de courbure

$$\left\{ \begin{aligned} \{ (1+p^2) - (z'-z)r \} dx + \{ pq - (z'-z)s \} dy &= 0 \\ \{ pq - (z'-z)s \} dx + \{ (1+q^2) - (z'-z)t \} dy &= 0 \end{aligned} \right\}$$

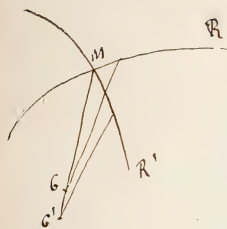
où $z'-z$ est la distance entre les 2 de la Normale et de la lre. force, et tirons-en $z'-z$. En divisant pour éliminer dx et dy , on aura

$$\{ (1+p^2) - (z'-z)r \} \{ (1+q^2) - (z'-z)t \} - \{ pq - (z'-z)s \} \{ pq - (z'-z)s \} = 0$$

D'où

$$(z'-z)^2 (rt - s^2) - (z'-z) \{ (1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs \} + p^2 + q^2 + 1 = 0$$

ou bien de voir de là les deux valeurs de $z'-z$, on peut



multiplier tout par $1+p^2+q^2$, et l'on aura l'Eq. en δ :

$$(rt-s^2)\delta^2 - \delta\sqrt{1+p^2+q^2}\{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pq s\} + (1+p^2+q^2)^2=0$$

Les deux valeurs de δ sont les deux rayons de courbure de la surface.

Pour les surfaces développables, on a

$$rt-s^2=0$$

alors l'Eq. précédente a une racine infinie: et alors en effet, le long d'une génératrice, le plan tangent est le même. Donc les Normales sont toutes perpendiculaires à un même plan, et parallèles.

on voit donc ainsi que la génératrice rectiligne est une ligne de courbure et que les deux rayons de courbure de la surface se réduisent à un seul.

Cherchons la surface développable formée par les normales qu'on peut mener le long d'une ligne de courbure.

Les équations d'une normale sont

$$\begin{cases} x'-x+p(z'-z)=0 \\ y'-y+q(z'-z)=0 \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$z=f(x,y)$$

et aussi l'équation de la ligne de courbure projetée sur xy . Soit

$$F(x,y,a)=0$$

a étant une constante d'intégration. Si, entre ces 2 équations on élimine x, y, z , on aura une équation

$$\varphi(x',y',z',a)=0$$

qui sera l'équation de la surface développable correspondante à chaque ligne de courbure.

Preons pour exemple les surfaces de révolution, l'équation générale est

$$z = f(x^2 + y^2)$$

D'où

$$p = 2x \cdot f'$$

$$q = 2y \cdot f'$$

$$r = 2x^2 f'' + 2 f'$$

$$s = 4xy f''$$

$$t = 4y^2 f'' + 2 f'$$

En substituant dans l'équation générale des lignes de courbure, on trouve un facteur commun, qui est

$$f'' - 2f'^2$$

et il reste

$$xy dx^2 + (y^2 - x^2) dx dy - xy dy^2 = 0$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{x^2 - y^2}{xy} \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} \end{cases}$$

ainsi, pour les surfaces de révolution, les équations des lignes de courbure sont

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

D'où

$$y = ax$$

J

$$y dy + x dx = 0$$

$$2y dy + 2x dx = 0$$

$$y^2 + x^2 = R^2$$

ainsi, il y a deux espèces de lignes de Courbure: les méridiennes dont la projection est $y = ax$, et les cercles parallèles, dont la projection est $y^2 + x^2 = R^2$: et il est facile de le démontrer à posteriori.

Courbure Des Surfaces.

Pour étudier la courbure d'une surface, on ne peut, comme dans le cas des courbes, la comparer à celle d'une sphère osculatrice : car tout n'est pas symétrique autour de la normale.

Contact Des Surfaces.

Soit M un point commun à deux surfaces. Soient h et k les accroissements de x et de y . L'ordonnée perp. à XY en P rencontrera la 1^{re} surface en M' et la seconde en M'' . Si $M'M''$ est un infiniment petit d'ordre $n+1$, les deux surfaces sont dites avoir un contact d'ordre n .

Donc deux surfaces ont un contact du 1^{er} ordre lorsque, en donnant à x et y des accroissements infiniment petits, on trouve que la différence des ordonnées est du 2^o ordre.

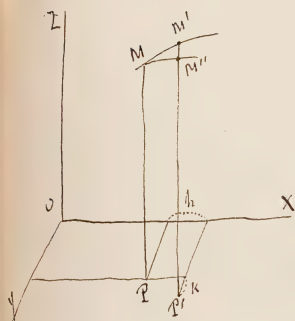
Sont donc

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = g(x, y) \end{cases}$$

les deux surfaces. on aura, comme $f = g$ pour le z du point M ,

$$\begin{aligned} M'M'' &= h \left\{ \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx} \right\} + k \left\{ \frac{df}{dy} - \frac{dg}{dy} \right\} \\ &+ \frac{1}{1.2} \left\{ h^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d^2g}{dx^2} \right) + 2hk \left(\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{d^2g}{dxdy} \right) + k^2 \left(\frac{d^2f}{dy^2} - \frac{d^2g}{dy^2} \right) \right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour que $M'M''$ soit du second ordre quel que soient h et k ,



il faudra évidemment que

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \\ \frac{df}{dy} = \frac{dy}{dy} \end{cases}$$

En général, pour que le contact soit d'ordre n , il faudra que toutes les dérivées partielles des n premiers ordres soient égales.

Supposons qu'on ait une surface parfaitement définie, et qu'une autre renferme des paramètres. on la rendra osculatrice en déterminant les paramètres de façon à rendre le contact d'ordre le plus élevé possible.

Exemple. Plan Osculateur.

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'eq. de la surface, et

$$z' = \alpha x' + \beta y' + \gamma'$$

celle du plan. Elle pourra s'écrire

$$z' - z = \alpha (x' - x) + \beta (y' - y)$$

puisque le plan doit passer en $M(x, y, z)$. Soit

$$\frac{dz}{dx} = \alpha \quad \frac{dz}{dy} = \beta$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \alpha \quad q = \frac{dz}{dy} = \beta$$

Donc l'eq. du plan osculateur est

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

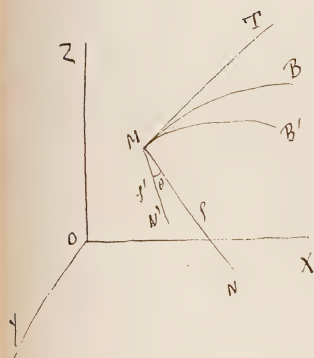
C'est le plan Tangent.

Problème. Est-il possible de trouver une sphère osculatrice, qui ait partout un contact du 2^e ordre avec la surface ?

L'eq. de la sphère contient 4 paramètres. or elle doit passer par un point de la surface, puis avoir un contact du 1^{er} ordre. Cela fait déjà 3 conditions. Pour que le contact s'élève au 2^e ordre, il y a encore 3 conditions à remplir : donc le problème n'est pas possible en général.

Cependant, il reste un paramètre. Il est évident qu'on pourrait en disposer de manière à rendre le contact du 2^e ordre dans une direction déterminée.

Il faut donc suivre une autre marche pour étudier la courbure des surfaces.



Soit M un point d'une surface, MN la normale. Prenons un plan quelconque par la normale et une tangente MT . Si par MT on mène un autre plan, qui coupe la surface suivant MB' , et si l'on appelle ρ et ρ' les deux rayons de courbure des sections planes MBT et $MB'T$, je dis que

$$\rho' = \rho \cos \theta$$

θ étant l'angle des deux plans, ou, ce qui revient au même, celui de MN avec MN' .

Cherchons $\cos \theta$.

Le cosinus de l'angle de MN' avec Ox est

$$\rho' \frac{dx}{ds}$$

Prenons s pour variable indépendante, et posons

$$\frac{dx}{ds} = x' \quad \frac{d^2x}{ds^2} = x'' \quad \text{etc.}$$

alors les cosinus des angles de mn' avec les axes sont

$$mn' \quad \left\{ \begin{array}{l} p'x'' \\ p'y'' \\ p'z'' \end{array} \right.$$

Pour mn : d'eq. du plan tangent étant

$$x' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

Nous aurons, pour les cosinus de la Normale,

$$MN \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{-p}{\pm \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ \cos \beta = \frac{-q}{\pm \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \end{array} \right.$$

Donc

$$\cos \theta = p' \frac{-px'' - qy'' + z''}{\pm \sqrt{p'^2 + q'^2 + 1}}$$

Maintenant, la tangente mx est dans le plan tangent à la surface. donc

$$dx = p dx + q dy$$

d'ui

$$\frac{dx}{ds} \text{ ou } x' = px' + qy'$$

en différentiant,

$$x'' = px'' + x \left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right) + x' \left(\frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \right) + qy'' + y' \left(\frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right) + y' \left(\frac{dq}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \right)$$

d'ui

$$x'' = px'' + x x'^2 + qy'' + 4y'^2 + 2s x'y'$$

$$x'' - px'' - qy'' = x x'^2 + 2s x'y' + 4y'^2$$

Donc enfin

$$\cos \theta = f' \frac{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

à présent, si l'on suppose que l'on fasse tourner autour de MT le plan TMB', le facteur qui multiplie f' resterait invariable, et f' changerait. Or, supposons que ce plan coïncide avec le plan TMB, alors $\cos \theta = 1$, et il vient, pour la Section normale

$$f = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}$$

Par suite, l'équation précédente devient

$$\cos \theta = \frac{f'}{f}$$

Où

$$f' = f \cos \theta$$

Donc

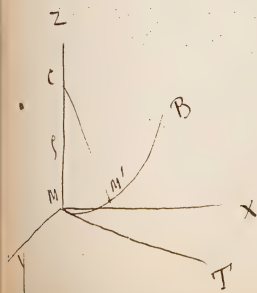
Le théorème. — Le Rayon De Courbure De Toute Section oblique et la projection, sur le plan de cette section, Du rayon De Courbure De la Section normale qui passe par la même Tangente.

On peut étendre au cas où MB' est une courbe gauche, en s'appuyant sur les propriétés du plan osculateur.

Transportons maintenant l'origine en M, et prenons pour axe des Z la normale elle-même, de sorte que le plan XOY est le plan tangent. — Soit f le rayon de courbure de la Section normale ZMT. Sa valeur devient alors

$$f = \frac{1}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}$$

C'est sous cette forme que nous l'étudierons.



Remarque. - Sous cette dernière forme

$$\rho = \frac{1}{x'^2 + 2sx'y' + ty'^2}$$

supposons que nous rétablissions le signe \pm . Or, le rayon ρ courbure est une quantité essentiellement positive, et est même
- positif.

Or, admettons que l'on prenne ρ positif quand la courbe est au-dessous du plan tangent, et ad. quand ρ est dirigé dans le sens des axes x et y positifs. Je dis qu'alors le dénominateur de ρ est positif. - En effet, en général on a toujours

$$z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

Mais si $p = q = 0$. donc

$$z'' = \frac{dx}{ds} = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

donc

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)}$$

et le dénominateur est la dérivée du cosinus de l'angle de la tangente MT avec l'axe des x . Le cosinus est nul en M . Elevons-nous sur MT , il croît : donc sa dérivée est positive. De même dans le cas contraire.

Il résulte de là que, si l'on supprime le double signe, suivant qu'on trouvera pour ρ une valeur positive ou négative, cela rendra dire que la courbe MT sera au-dessus ou au-dessous du plan tangent, - même : qu'elle sera concave ou convexe vers les x positifs.

Soit maintenant

$$\cos \angle TMx = \rho$$

alors on aura

$$f = \frac{1}{r \cos^2 \alpha + 2s \sin \alpha \cos \alpha + t \sin^2 \alpha}$$

ou bien

$$f = \frac{1}{\cos^2 \alpha \{r + 2s \operatorname{tg} \alpha + t \operatorname{tg}^2 \alpha\}}$$

$\cos^2 \alpha$ est essentiellement positif. La quantité entre crochets est du 2^e degré. Il y a donc 3 cas possibles. Supposons successivement

$$rt - s^2 > 0$$

$$rt - s^2 < 0$$

$$rt - s^2 = 0$$

Si $rt - s^2 > 0$, les racines sont imaginaires, c. ad. que quel que soit α , f conserve invariablement le même signe. Donc alors, toutes les sections normales sont d'un même côté du plan tangent. on dit alors que la surface est convexe au point m .

Si $rt - s^2 < 0$, le trinôme change deux fois de signe. Donc il y a pour MT deux directions telles que f passera du positif au négatif en devenant infini, et si ms et ms' sont ces deux directions, elles partageront l'espace en 4 régions, dans deux desquelles les sections normales sont au-dessus du plan tangent, et dans les deux autres au-dessous. — aux points de passage, suivant ms et ms' , la courbure est nulle : le plan tangent a avec la surface un contact du 2^e ordre.

Si enfin $rt - s^2 = 0$, le dénominateur passe par zéro

Dans chaque Deligne: la surface est morte convexe: Par-
-lement il y a une direction limite pour laquelle la courbure
est nulle. Cette condition est évidemment remplie en tous
les points d'une surface Développable.

Voilà maintenant si ρ est susceptible d'un maximum
ou d'un minimum. Je prends la dérivée du dénominateur
et j'ai égale à zéro. J'aurai

$$-r \cos 2\alpha + s (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + t \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0$$

ou bien

$$2s \cos 2\alpha = (r-t) \sin 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2s}{r-t}$$

Il y a une valeur unique pour $\tan 2\alpha$. Donc l'angle
 2α existe toujours. Combien y a-t-il de valeurs pour 2α ?
 2α ne peut varier que de 0° à 180° . Si donc j'appelle
 $2\alpha'$ le plus petit arc positif qui répond à $\tan 2\alpha = \frac{2s}{r-t}$.
on aura $2\alpha'$ et $2\alpha' + \pi$. Donc les deux seules valeurs
possibles de 2α sont $2\alpha'$ et $2\alpha' + \frac{\pi}{2}$. Les deux directions
sont à angle droit. Donc

Il existe deux directions rectangulaires pour lesquelles
le rayon de courbure peut être maximum ou minimum.

Est-il réellement?

Revenons pour le savoir à la dérivée du dénominateur.
Je prends la dérivée seconde. Elle sera

$$-4s \sin 2\alpha - 2(r-t) \cos 2\alpha$$

ou

$$-2 \cos 2\alpha \{ (r-t) + 2s \tan 2\alpha \}$$

ou

$$-2 \cos 2\alpha \cdot \frac{(r-t)^2 + 4s^2}{r-t}$$

Si je change α en α' et en $\alpha/2$, il est facile de voir que cette expression prend deux lignes différentes. Donc une des valeurs répond à un maximum, l'autre à un minimum.

Si cependant $r < t$, le raisonnement tombe en défaut; mais alors la dérivée \sin est $2s \cos 2\alpha$, et la conséquence est évidente.

Donc il y a bien deux sections rectangulaires pour lesquelles f est maximum et minimum.

Prends les pour axes des x et des y . Une des valeurs de α doit être nulle. Donc $S = 0$. Donc la valeur de f prend l'écrit :

$$f = \frac{1}{r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha}$$

et alors f devient maximum ou minimum selon que $\sin \alpha = 0$ ou $\cos \alpha = 0$. - Pour ces deux cas, on a

$$R_1 = \frac{1}{r}$$

$$R_2 = \frac{1}{t}$$

R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principales : et l'on pourra écrire

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha.$$

Remarque importante.

Supposons pour un instant qu'on veuille chercher la valeur de α , nous ayons pris l'éq. en α .
L'éq. écrit (p. 182)

$$-r \cos \alpha \sin \alpha + s (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + t \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

ou bien

$$-r \operatorname{Tg} \alpha + s - s \operatorname{Tg}^2 \alpha + t \operatorname{Tg} \alpha = 0$$

ou encore

$$\operatorname{Tg}^2 \alpha - \frac{t-s}{s} \operatorname{Tg} \alpha - 1 = 0$$

or cette équation est précisément la même que celle qui nous avait été donnée (p. 170) les Deux Directions Des Tangentes aux lignes De courbure.

Donc :

Les lignes De courbure Des Surfaces sont celles où les rayons De courbure ρ sont maximum & minimum.

2. les compléments
p. 492.

Je place ici, comme complément de l'étude D'une Surface autour D'un point, un Théorème fort Important donné par M^r. Bertrand.

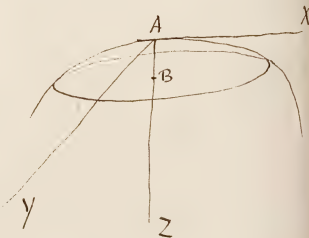
Le théorème . -

Quelle que soit une surface, si A est un point de cette surface, B un point de la Normale, si en B on fait une section plane parallèle au plan Tangent la courbe De section, dont les dimensions diminuent de plus en plus en même temps que AB, s'approche indéfiniment D'être semblable à une section conique.

Prenons pour plan Des xy le plan Tangent en A, et pour axe Des z la Normale. Soit

$$z = f(x, y)$$

l'Eq. De la surface. Elle est évidemment satisfaite pour $z=0$, $y=0$, $x=0$: et De plus on a alors $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = 0$.



Quelle est l'équation de la section faite par B ? Evidemment

$$AB = z$$

$$z = q(x, y)$$

et De plus, cette équation représente la section en véritable grandeur.

Développant :

$$z = q(0, 0) + x \left(\frac{dq}{dx} \right)_0 + y \left(\frac{dq}{dy} \right)_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2q}{dx^2} \right)_0 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2q}{dy^2} \right)_0 + xy \left(\frac{d^2q}{dxdy} \right)_0 + R$$

R renfermant des termes du 3^e. Degré et plus en x et y.

Les 2 premiers termes du 2^e. membre sont rigoureusement nuls.

Quant aux coefficients suivants, ce sont des constantes. Donc

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + R$$

Si z tend vers zéro, la courbe tend vers un point. - Mais, pour en suivre la forme, imaginons une courbe semblable. Posons

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{m} \\ y = \frac{y'}{m} \end{cases}$$

L'équation de la courbe semblable sera

$$m^2 z = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + R, m^2$$

J' suppose que m augmente de manière que $m^2 z$ ait une valeur constante C. alors

$$C = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + R, m^2$$

or j'ai dit que R, m^2 tend indéfiniment vers zéro : cela tient à ce que R, étant du 3^e Degré en x et y, contient au moins m^3 en dénominateur dans tous ses termes.

Donc l'équation tend vers :

$$C = ax'^2 + by'^2 + cy'^2$$

Ex. D'une section Conique.

(972).

Corollaire. — Une surface qui jouit de la propriété que toutes ses sections parallèles sont des courbes semblables, ou, pour toutes ses sections, des courbes du second degré, donc ce ne peut être qu'une surface du 2^e degré.

187.

188.

189.

Calcul Intégral.

Notes.

Mly.

190.

capitulum

Intégrations Immédiates.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Cette formule est générale. — Cependant, si $m = -1$, on aurait

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C$$

forme indéfinie. Cependant, on sait que $d \cdot \log x = \frac{dx}{x}$, donc
 $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$. — or on peut écrire

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

Si $m = -1$, $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ devient $\frac{0}{0}$. or la vraie valeur est $\log x$. donc

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C = \int \frac{dx}{x}.$$

on peut faire autrement. — Posons $m = -1 + h$, et faisons tendre h vers zéro. Nous aurons

$$\int \frac{dx}{x^{1-h}} = \frac{x^h}{h} + C$$

reste à trouver $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h}{h}$. Développons x^h .

$$\begin{aligned} x^h = e^{h \log x} &= 1 + \frac{h \log x}{1} + \frac{h^2 (\log x)^2}{1 \cdot 2} + \dots \\ &= 1 + \frac{h \log x}{1} + M h^2 + \dots \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x^{1-h}} = \frac{1}{h} + C + Lx + Mh$$

$$= C' + Lx + Mh$$

Si h tend vers zéro, il vient à la limite

$$\int \frac{dx}{x} = Lx + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

etc.

quelques l'intégration se fait immédiatement par un changement de variable.

Soit

$$y = \int (ax^m + b)x^{m-1} dx$$

Posons

$$ax^m + b = z$$

$$ma x^{m-1} dx = dz$$

$$dx = \frac{dz}{ma x^{m-1}}$$

$$x^{m-1} dx = \frac{dz}{ma}$$

Donc

193.

$$y = \int \frac{z dz}{m a} = \frac{1}{m a} \int z dz = \frac{1}{2 m a} (a x^m + b)^2 + C$$

Q. mini.

$$\int (a x^m + b)^n x^{m-1} dx = \frac{1}{(n+1)m a} (a x^m + b)^{n+1} + C$$

Soit

$$y = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

on pose

$$x^4 - 1 = z$$

$$4 x^3 dx = dz$$

$$x^3 dx = \frac{dz}{4}$$

$$y = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4} \sqrt{z} + C = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 1} + C$$

Soit

$$y = \int \frac{dx}{(x-a)^2 + \beta^2}$$

Posez

$$x - a = \beta z$$

$$dx = \beta dz$$

$$y = \int \frac{\beta dz}{\beta^2 (1+z^2)} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\beta} \arctan z + C = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{x-a}{\beta} + C$$

En général :

$$y = \int f(u q(x)) q(x) dx$$

on pose

$$u q(x) = z$$

Donc

$$q'(x) dx = \frac{1}{a} dx$$

et

$$y = \int \frac{f(z) dz}{a}$$

et si l'on sait intégrer $f(z) dz$, on saura trouver y .

Intégration par Décomposition.

Décomposition Des Fractions Rationnelles
en Fractions Simples.

on sait que si l'on a une somme de fractions

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l}$$

et si on les ajoute, on aura une fraction $\frac{q(x)}{f(x)}$ dans laquelle $q(x)$ serait d'un degré moindre que le dénominateur $f(x)$.

Réciproquement, si l'on a la fraction $\frac{q(x)}{f(x)}$, on peut se proposer de la décomposer ainsi, $q(x)$ étant au plus de degré $m-1$, ce qu'on peut toujours supposer. — on peut aussi toujours admettre que la fraction est irréductible, et que le coefficient de la plus haute puissance de x , dans $f(x)$, est l'unité.

Comment peut-on effectuer la décomposition ?

Il y a deux cas.

Premier cas. — Le dénominateur $f(x)$ n'a que des racines égales.

Posez l'identité

$$\frac{q(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l} \quad (1)$$

ou bien

$$q(x) = A \frac{f(x)}{x-a} + B \frac{f(x)}{x-b} + \dots + L \frac{f(x)}{x-l} \quad (2)$$

Si je fais $x=a$, l'identité subsiste encore, et devient

$$q(a) = A \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{x-a} \right)$$

$$= A f'(a)$$

Donc

$$A = \frac{q(a)}{f'(a)}$$

De même

$$B = \frac{q(b)}{f'(b)}$$

$$\vdots$$

$$L = \frac{q(l)}{f'(l)}$$

Il ne s'agit pas de savoir si l'on obtiendra bien une identité en reportant ces valeurs dans l'équation (2). — or je sais déjà qu'en les reportant dans (2), cette équation serait satisfaite pour les m valeurs de x : a, b, c, \dots, l . et l'éq. (2) est au plus de degré $m-1$. Donc cette équation est bien identique, et la méthode est ainsi rigoureusement justifiée.

Deuxième cas. —

Supposons maintenant $f(x) = (x-a)^m \psi(x)$

alors posons

$$(1) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\psi(x)}$$

ou bien

$$(1) \quad \varphi(x) = \left\{ \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} \right\} f(x) + (x-a)^n f_1(x)$$

Cela doit être une identité. Or, on peut écrire :

$$(2) \quad \varphi(x) - \left\{ \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} \right\} f(x) = (x-a)^n f_1(x)$$

Le 1^{er} membre doit être divisible par $(x-a)^n$, puis que le second l'est.

Posons

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a) \varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} \varphi''(a) + \dots$$

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(a) + \dots$$

Égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de $x-a$ quand on aura reporté ces valeurs dans la dernière égalité. Il viendra

$$\varphi(a) - A \frac{f^{(n)}(a)}{1.2 \dots n} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ est essentiellement fini} \\ \text{et différent de zéro.} \end{array} \right.$$

$$\varphi'(a) - A \frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2 \dots (n+1)} - A_1 \frac{f^{(n)}(a)}{1.2 \dots n} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \text{ peut être nul, mais} \\ \text{non pas infini.} \end{array} \right.$$

$$\frac{\varphi''(a)}{1.2} - A \frac{f^{(n+2)}(a)}{1.2 \dots (n+2)} - A_1 \frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2 \dots (n+1)} - A_2 \frac{f^{(n)}(a)}{1.2 \dots n} = 0$$

$$\dots \dots \dots \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{1.2 \dots (n-1)} - A \frac{f^{(2n-1)}(a)}{1.2 \dots (2n-1)} - \dots - A_{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{1.2 \dots n} = 0$$

Maintenant, on peut répéter le même raisonnement sur $\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}$: car d'abord elle est divisible, autrement le degré de son dénominateur s'abaisserait, et, en réduisant au même dénominateur, on ne retrouverait plus $f(x)$. - or il est inutile de faire de nouveaux raisonnements : car on remarque que les calculs à faire relativement à la racine b sont absolument les mêmes que pour la racine a . Donc les procédés peuvent servir avec quelques légers changements.

Il s'agit à montrer que l'équation (2) devient une identité quand on y remplace A, A_1, \dots par leurs valeurs ainsi déterminées. - or, d'après la méthode, il arrivera que le premier membre aura nécessairement cette forme

$$P(x-a)^n + Q(x-a)^{n+1} + R(x-a)^{n+2} + \dots$$

C'est-à-dire qu'on pourra l'identifier à un polynôme donné

$$(x-a)^n f_1(x)$$

et calculer $f_1(x)$. De façon que l'éq. (2) devienne une identité.

On peut donner une autre forme au calcul.

au lieu d'introduire les dérivées de $f(x)$, on peut introduire celles de $\psi_1(x)$. car, pour toujours

$$\frac{q(x)}{(x-a)^n \psi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}$$

Donc

$$q(x) - A \psi_1(x) - A_1 (x-a) \psi_1(x) - \dots - A_{n-1} (x-a)^{n-1} \psi_1(x) = (x-a)^n f_1(x)$$

Le 1^{er} membre doit être divisible par $(x-a)^n$. or

$$\psi_1(x) = \psi_1(a) + (x-a) \psi_1'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} \psi_1''(a) + \dots$$

De sorte qu'on trouve les nouvelles Equations :

$$q(a) - A \psi_1(a) = 0$$

$$q'(a) - A \psi_1'(a) - A_1 \psi_1(a) = 0$$

$$\frac{q''(a)}{1.2} - A \frac{\psi_1''(a)}{1.2} - A_1 \psi_1'(a) - A_2 \psi_1(a) = 0$$

etc.

Cette forme est plus simple, et préférable toutes les fois que
Des calculs antérieurs auront obligé à chercher la fonction
 $\psi_1(x)$.

Il y a Des cas où le calcul se simplifie. Soit

$$\frac{q(x)}{(x-a)^n}$$

alors, posant $q(x) = q(a + x-a)$ et développant, on a im-
médiatement, si n' est le degré de $q(x)$,

$$\frac{q(x)}{(x-a)^n} = \frac{q(a)}{(x-a)^n} + \frac{q'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\frac{1}{2} q''(a)}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{\frac{1}{n!} q^{(n)}(a)}{(x-a)^{n-n'}}$$

Rem. - La décomposition n'est possible que d'une seule
manière. Car autrement, on aurait

$$E(x) + \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \dots = E_1(x) + \frac{A_1}{(x-a)^{n_1}} + \dots$$

Or, si d'abord que $n = n_1$. Car, si $n > n_1$, on aurait
un résidu de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^n} = \frac{B}{K(x-a)^{n-1}} + \dots$$

égalité impossible. Donc $n = n_1$. Maintenant, $A_1 = A$. De
même, chaque fraction du 1^{er} membre se son égale dans le
second. C'est les entiers, qui doivent être identiques.
(voir, alg. de Bertrand).

Enfin, on peut examiner les Deux Racines Imaginaires:

$$\begin{cases} \alpha + \beta\sqrt{-1} \\ \alpha - \beta\sqrt{-1} \end{cases}$$

En raisonnant de même, on trouve

$$\frac{N}{\alpha - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{N'}{\alpha - \alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

ou on a

$$N = \frac{q(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = G + H\sqrt{-1}$$

$$N' = \frac{q(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = G - H\sqrt{-1}$$

alors la somme des Deux fractions devient

$$\frac{2G(\alpha - \alpha) - 2H\beta}{(\alpha - \alpha)^2 + \beta^2}$$

résultat de la forme

$$\frac{P\alpha + Q}{(\alpha - \alpha)^2 + \beta^2}$$

Si α est une Racine Imaginaire Égale, on aura

$$\frac{M + N\sqrt{-1}}{(\alpha - \alpha + \beta\sqrt{-1})^n} \quad \text{ou} \quad \frac{M - N\sqrt{-1}}{(\alpha - \alpha - \beta\sqrt{-1})^n}$$

La somme sera encore réelle. Car, posons

$$\alpha - \alpha \pm \beta\sqrt{-1} = f (\cos q \pm \sqrt{-1} \sin q)$$

$$\begin{cases} f^2 = (\alpha - \alpha)^2 + \beta^2 \\ \cos q = \frac{\alpha - \alpha}{f} \\ \sin q = \frac{\beta}{f} \end{cases}$$

alors les deux fractions prennent la forme

$$\frac{M + N\sqrt{-1}}{\rho^n \{ \cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi \}} \quad \text{et} \quad \frac{M - N\sqrt{-1}}{\rho^n \{ \cos n\varphi - \sqrt{-1} \sin n\varphi \}}$$

et l'on retombe sur le cas précédent. Donc la somme est réelle.

Seulement, on ne voit pas de formule générale qui donne cette somme.

Mais cherchons à développer ainsi :

$$\frac{q(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^n} + \dots + \frac{A_{n-1}x + B_{n-1}}{\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}} + \frac{q_1(x)}{V_1(x)}$$

ou

$$q(x) - (Ax + B)V_1(x) - \dots - (A_{n-1}x + B_{n-1})\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^{n-1}V_1(x) = \{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^n q_1(x)$$

Le 1^{er} membre doit être divisible exactement par $\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^n$.

Il doit donc avoir n racines égales à $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. Donc le

1^{er} membre et ses $n-1$ 1^{res} dérivées doivent être nulles

pour $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. on aura d'abord

$$q(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - \{A(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + B\}V_1(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0$$

Donc

$$\frac{q(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{V_1(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = M + N\sqrt{-1}$$

M et N ne pouvant être nuls simultanément : - l'équation devient

$$A\alpha + B + A\beta\sqrt{-1} = M + N\sqrt{-1}$$

d'où

$$\begin{cases} A\alpha + B = M \\ A\beta = N \end{cases}$$

Deux équations dont on peut tirer A et B . - De même, chaque équation se dédouble en deux autres, qui donneront les coefficients cherchés.

Les deux premières équations donnent

$$A = \frac{N}{\beta}$$

$$B = M - \frac{N\alpha}{\beta}$$

A et B ne sont donc pas nuls simultanément, non plus qu'infinités, car $\beta \neq 0$, autrement on rentrerait dans le cas des racines réelles.

on verrait de même que A_1 et B_1 , A_2 et B_2 , ... peuvent être nuls simultanément, et jamais infinis.

Passons à l'intégration de ces différents résultats.

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int (x-a)^{-1} dx = \int c (x-a)^A$$

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} dx = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(Ax+B) dx}{(x-a)^2 + \beta^2} &= \int \frac{A(x-a) dx}{(x-a)^2 + \beta^2} + (A\alpha + B) \int \frac{dx}{(x-a)^2 + \beta^2} \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{dx}{(x-a)^2 + \beta^2} + (A\alpha + B) \int \frac{dx}{(x-a)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

Alors

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + \beta^2} = \int \frac{\frac{dx}{\beta^2}}{1 + \left(\frac{x-a}{\beta}\right)^2} = \frac{1}{\beta} \int \frac{\frac{dx}{\beta}}{1 + \left(\frac{x-a}{\beta}\right)^2} = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{x-a}{\beta}$$

Donc

$$\int \frac{(Ax+B) dx}{(x-a)^2 + \beta^2} = \frac{A}{2} \int \frac{dx}{(x-a)^2 + \beta^2} + \frac{A\alpha + B}{\beta} \arctan \frac{x-a}{\beta}$$



$$\int \frac{(Ax+B) dx}{\{(x-a)^2+\beta^2\}^n} = \int \frac{A(x-a) dx}{\{(x-a)^2+\beta^2\}} + (A\alpha+B) \int \frac{dx}{\{(x-a)^2+\beta^2\}^n}$$

$$= -\frac{A}{2(n-1)\{(x-a)^2+\beta^2\}^{n-1}} + (A\alpha+B) \int \frac{dx}{\{(x-a)^2+\beta^2\}^n}$$

Donc

$$x-a = \beta z$$

$$y = \int \frac{dx}{\{(x-a)^2+\beta^2\}^n}$$

alors

$$y = \int \frac{\beta dz}{\beta^{2n}(z^2+1)^n} = \frac{1}{\beta^{2n-1}} \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

appuyons-nous ici sur une méthode nouvelle d'intégration,
1) Intégration par parties. on a

$$d(uv) = u dv + v du$$

Donc

$$uv = \int u dv + \int v du$$

Donc

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ceci résume la méthode qui consiste simplement dans
1) application de cette formule. - cette méthode est une
des plus fécondes du calcul intégral.

on aura ici

$$Y = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int \left\{ \frac{z^2+1}{(z^2+1)^n} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n} \right\} dz = \int \left\{ \frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n} \right\} dz$$

$$Y = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^n}$$

Il faut

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^n} = \int z \cdot \frac{z dz}{(z^2+1)^n} = \frac{-z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-1} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

Donc

$$Y = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Maintenant, opérant de même sur la dernière intégrale, on aura

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} = \frac{x}{2(n-2)(x^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-2}}$$

et ainsi de suite ; enfin, pour $n=2$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

Multipliant la 2^de. Equation par $\frac{2n-3}{2n-2}$, la 3^e. par

$\frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-3}{2n-2}$, etc. et ajoutant, on aura

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &+ \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-2}} \\ &+ \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-3}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3}{(2n-2)(2n-4)\dots 2} \cdot \frac{x}{x^2+1} \\ &+ \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3}{(2n-2)(2n-4)\dots 2} \cdot \arctan x + C \end{aligned} \right.$$

Donc Y est pour suite y .

applications.

Soit

$$\frac{f(x)}{q(x)} = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

on a $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$. D'ailleurs, $x=1$ n'annule pas le numérateur. - or on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{1.2 (x-a)^{n-2}} + \dots$$

Ainsi ici

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = 2$$

$$\frac{f''(1)}{1.2} = 3$$

et

$$\frac{f(x)}{q(x)} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}$$

d'où on a

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$\int \frac{2dx}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{3dx}{x-1} = 3 \int \frac{1}{x-1}$$

donc

$$\int \frac{f(x) dx}{q(x)} = 3 \int \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

Soit encore

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1}$$

on a

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

Done

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

or

$$A = \frac{f(a)}{q'(a)} = \frac{1}{3}$$

Part done

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

y/oi

$$3 - (x^2+x+1) - 3(x-1)(Bx+C) = 0$$

$$x^2(3B+1) - x(3B-3C-1) - 3C-1 = 0$$

y/oi

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

Done

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right\}$$

or

$$\int \frac{dx}{x-1} = \mathcal{L}(x-1)$$

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{(x+\frac{1}{2})dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{3}{2}dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L} \left\{ (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right\} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Done

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3} \mathcal{L}(x-1) - \frac{1}{6} \mathcal{L}(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

on sait qu'on a

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc Tg } x + C$$

Si l'on prenait la forme donnée pour les racines réelles,
on aurait

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{A}{x-\sqrt{-1}} + \frac{B}{x+\sqrt{-1}}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$$

$$B = \frac{1}{-2\sqrt{-1}}$$

Donc

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{x+\sqrt{-1}} \right)$$

Intégrant

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \int \frac{1}{x-\sqrt{-1}} - \int \frac{1}{x+\sqrt{-1}} \right\} + C' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} + C' \end{aligned}$$

Autre expression bien différente. — on a donc

$$\text{arc Tg } x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} + C$$

on peut trouver la valeur de C en faisant $x=0$, ce qui donne.

$$0 = \int \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} + C$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{arc Tg } x &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \int \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} - \int \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{\sqrt{-1}-x}{x+\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Soit encore $y = \int \frac{dx}{x^2-1}$

on a $x^2-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Donc $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$
 $A = \frac{q(1)}{f'(1)} = \frac{q(-1)}{f'(-1)}$
 $A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$

Pour trouver C et D,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{f_1(x)}{x^2-1}$$

$$1 - (Cx+D)(x^2-1) = (x^2+1)f_1(x)$$

Le 1^{er} membre doit être divisible par x^2+1 . Donc, si on substitue dans ce 1^{er} membre $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$, il doit être nul indépendamment. Donc

$$1 - (C\sqrt{-1} + D)(-1-1) = 0$$

$$1 - 2(C\sqrt{-1} + D) = 0$$

$$\begin{cases} 1+2D=0 \\ C=0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} D=-\frac{1}{2} \\ C=0 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

on enfin

$$\arctan x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

Cette formule aurait pu être trouvée autrement. Car on a

$$\begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x \end{cases}$$

Donc

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1} \sin x}{\cos x - \sqrt{-1} \sin x}$$

$$= \frac{1+\sqrt{-1} \arctan x}{1-\sqrt{-1} \arctan x}$$

Posons $\arctan x = u$ alors

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$2x\sqrt{-1} = \int \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$2\sqrt{-1} \arctan x = \int \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

C'est la même formule que tout-à-l'heure.

Soit encore

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \right) dx = -\frac{1}{2} \left\{ \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-1} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \int \frac{x+1}{x+1} - \int \frac{x-1}{x-1} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x+1} + C$$

ou bien

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + C$$

Intégration Des Fonctions Irrationnelles.

Soit

$$y = \int \frac{\sqrt[3]{x^2 + x} - \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x^2}} dx$$

on a

$$y = \int \frac{x^{\frac{2}{3}} + x - x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{x^{\frac{6}{12}} + x^{\frac{12}{12}} - x^{\frac{18}{12}}}{x^{\frac{3}{12}} - x^{\frac{6}{12}}} dx$$

Posez $x = t^{12}$ d'où $dx = 12 t^{11} dt$. Il viendra

$$y = 12 \int \frac{t^5 + t^9 - t^{15}}{1 - t^3} t^{11} dt$$

on retombe dans le cas précédent :

on voit que ce mode de transformation réussira toutes les fois que l'on aura ainsi que Des Irrationnelles monômes.

La difficulté commence quand les Irrationnelles portent sur Des Polynômes.

Le procédé Général d'Intégration est Celui-ci :

Changer de variable de manière à rendre Rationnelle la quantité proposée.

Cela fait, on retombe dans le cas précédent.

1°.

$$y = \int f(x, \sqrt{ax + b}) dx$$

Posons

$$a+bx = z^2$$

$$x = \frac{z^2 - a}{b}$$

$$dx = \frac{2z dz}{b}$$

Ainsi

$$y = \int \frac{2z}{b} f\left(\frac{z^2 - a}{b}, z\right) dz$$

ce qui pourra s'intégrer, si f est une fonction rationnelle.

2°: Plus généralement:

$$y = \int f\left(x, (a+bx)^{\frac{p}{q}}, (a+bx)^{\frac{p'}{q'}}, \dots\right) dx$$

cela peut s'écrire

$$y = \int f\left(x, (a+bx)^{\frac{m}{p}}, (a+bx)^{\frac{n}{p}}, \dots\right) dx$$

Posant

$$a+bx = z^D$$

$$x = \frac{z^D - a}{b}$$

$$dx = \frac{D z^{D-1} dz}{b}$$

et substituant, on aura sous le signe \int une fonction de z entièrement rationnelle.

on rencontre ainsi des expressions de la forme

$$y = \int f\left(x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{a'+b'x}\right) dx$$

Posons même

$$a+bx = z^2$$

$$x = \frac{z^2 - a}{b}$$

$$dx = \frac{2z dz}{b}$$

Si l'on substitue, il vient

$$y = \int q(z, \sqrt{A+Bz^2}) dz$$

et il ne reste plus qu'un seul radical portant sur une quantité du Second degré.

Il y a alors une méthode générale.

Soit en effet :

$$y = \int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$$

Alors, il est facile de voir que l'on peut toujours ramener y à l'une de ces formes

$$y = \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad y = \int x dx \sqrt{a+bx+cx^2}$$

En effet, la fonction f est nécessairement de la forme

$$\frac{A + B \sqrt{a+bx+cx^2}}{A_1 + B_1 \sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Multipliant numér. et denom. par $A_1 - B_1 \sqrt{a+bx+cx^2}$, on a

$$\frac{P + Q \sqrt{a+bx+cx^2}}{D} = \frac{P}{D} + \frac{Q}{D} \sqrt{a+bx+cx^2}$$

c'est bien ce que nous désirons : et si l'on multiplie et divise par le radical, il passe au dénominateur, ce qui est souvent plus commode.

Reprenons

$$y = \int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$$

Si $c > 0$, on peut le faire sortir du radical : et

à prendre l'ensemble

$$y = \int f(u, \sqrt{a+bu+u^2}) du$$

Donc

$$\sqrt{a+bu+u^2} = z-u$$

$$a+bu = z^2 - 2zu$$

$$u = \frac{z^2 - a}{b+2z}$$

$$b du = 2z dz - 2u dz - 2z du$$

$$du = \frac{2(z-u) dz}{b+2z}$$

$$y = \int f\left(\frac{z^2-a}{b+2z}, z - \frac{z^2-a}{b+2z}\right) \cdot \frac{2(z - \frac{z^2-a}{b+2z})}{b+2z} dz$$

et le problème est ainsi résolu.

appliquons cette méthode à l'Intégrale

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}$$

$$\sqrt{a+2bx+x^2} = z-u$$

$$a+2bx = z^2 - 2zu$$

$$b du = z dz - z du - x dz$$

$$(b+z) du = (z-u) dz$$

$$\frac{du}{z-u} = \frac{dz}{\sqrt{a+2bx+x^2}} = \frac{dz}{b+z}$$

Donc

$$y = \int \frac{dz}{b+z} = \mathcal{L}(b+z) + C = \mathcal{L}\{b+u+\sqrt{a+2bx+x^2}\} + C$$

Si $b=0$ et $a=1$, il reste

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathcal{L}(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

Rem. - Il est clair qu'on peut poser

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x$$

on pourrait poser

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z + x$$

Si x^2 avait un coefficient c , on prendrait

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = z \pm x\sqrt{c}$$

Si l'on avait

$$y = \int \frac{(px+q)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$$

on introduirait au numérateur la différentielle exacte de la quantité sous le Radical. on aurait

$$y = \int \frac{p(x+b)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \int \frac{(q-pb)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$$

$$y = p\sqrt{a+bx+x^2} + (q-pb)\mathcal{L}(b+x+\sqrt{a+bx+x^2}) + C$$

Mais nous trouvons, en le réduisant d'une formule plus générale,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathcal{L}(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

on pourrait aussi, en intégrant directement, trouver d'autres résultats qui reviendraient à celui-ci. - Si l'on pose $\sqrt{1+x^2} = z - x$, on retrouve la même valeur. Mais, en

en posant

$$\sqrt{1+x^2} = z+x$$

donc

$$1 = z^2 + 2zx$$

$$0 = z dx + x dz + x dz$$

$$0 = (z+x) dz + z dx$$

$$\frac{dx}{z+x} = - \frac{dz}{z}$$

on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = - \int \frac{dz}{z} = - \int (\sqrt{1+x^2} - x) + C.$$

Il faut voir que ces deux formes sont bien identiques. Et en effet :

$$- \int (\sqrt{1+x^2} - x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{1} = \int (x + \sqrt{1+x^2})$$

Supposons maintenant que c , coefficient de x^2 sous le radical, étant négatif, on ait

$$\int f(x, \sqrt{a+2bx-x^2}) dx$$

La première transformation ne peut s'employer dans tous les cas. On a donc recours à un autre artifice.

Supposons d'abord que a soit positif. - alors, posons

$$\sqrt{a+2bx-x^2} = \sqrt{a} + xz$$

$$a+2bx-x^2 = a + 2xz\sqrt{a} + z^2x^2$$

divisant par x :

$$2b - x = 2z\sqrt{a} + xz^2$$

$$x = 2 \frac{b - z\sqrt{a}}{1 + z^2}$$

d'ailleurs l'équation précédente, différentiée, donne

$$-dx = 2\sqrt{a} dz + 2zx dz + z^2 dx$$

$$dx(1 + z^2) = -2dz(\sqrt{a} + xz)$$

Où

$$\frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} = - \frac{2dz}{1 + z^2}$$

et il n'y a plus qu'à substituer.

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - x^2}} &= -2 \int \frac{dz}{1 + z^2} = -2 \operatorname{arc} \operatorname{Tg} z \\ &= -2 \operatorname{arc} \operatorname{Tg} \frac{\sqrt{a + 2bx - x^2} - \sqrt{a}}{x} + C \end{aligned}$$

Si $b=0$ et $a=1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \operatorname{arc} \operatorname{Tg} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} + C$$

Il est évident que cette méthode aurait pu être appliquée aussi au cas précédent, toutes les fois pourtant que a est positif.

Mais, si a est négatif, il faut s'y prendre autrement.

Soit

$$\sqrt{-a + 2bx - x^2}$$

Posons

$$x^2 - 2bx + a = 0$$

Si les racines sont réelles, ce qui doit être d'ailleurs pour que le radical proposé soit réel, on pourra employer la transformation suivante. Soient α et β ces deux racines.

on a

$$\sqrt{-\alpha + 2\beta x - x^2} = \sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}$$

On pose

$$\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)z$$

Donc

$$\beta - \alpha = z^2(x-\alpha)$$

$$x = \frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2}$$

Donc encore

$$dx = 2z dx(x-\alpha) + z^2 dx$$

$$dx(1+z^2) = -2z dx(x-\alpha)$$

$$\frac{dx}{z(x-\alpha)} = \frac{dx}{\sqrt{-\alpha + 2\beta x - x^2}} = -\frac{2z dx}{1+z^2}$$

on en conclut que tout se fait à l'égard.

Cette transformation est toujours applicable au cas où l'on a sous le radical $+a$ et $-x^2$: car alors α et β sont essentiellement réels.

application. — Nous avons trouvé

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} + C$$

Cherchons directement cette intégrale par la dernière méthode.

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(x+1)(1-x)} = z(x+1)$$

$$1-x = z^2(x+1)$$

$$-dx = 2z \, dz (z+1) + z^2 \, dz$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{2 \, dz}{z^2+1}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2 \int \frac{dz}{1+z^2} = -2 \operatorname{arctg} z + C = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} + C$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} + C$$

Or l'intégrale qui doit être identique au précédent. or il est
aisé de le vérifier. Les posons $\frac{\sqrt{1-z^2}-1}{z} = u$, $\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z} = v$
on doit avoir

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \text{const.}$$

Donc la tangente du 1^{er} membre doit être constante :

$$\operatorname{tg} \{ \operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v \} = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} u) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} v)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} u) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} v)} = \text{const.}$$

or ceci donne

$$\frac{u-v}{1+uv} = \text{const.}$$

Substituant à u et v leurs valeurs, on trouve

$$\frac{u-v}{1+uv} = -1$$

ainsi les deux résultats deviennent au même.

Ailleurs, on sait immédiatement que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

et il s'agit encore de ramener cette dernière forme à
la précédente. — Posons

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u$$

Donc

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\operatorname{Ar} \frac{2u}{1-u^2} = \frac{2 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}}{1 - \frac{1-u}{1+u}} = 2 \frac{\sqrt{1-u^2}}{2u}$$

$$2u = \operatorname{arc} \operatorname{Tg} \cdot \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc} \operatorname{Tg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

or, posons

$$\operatorname{arc} \sin x = q$$

$$\begin{cases} x = \sin q \\ \sqrt{1-x^2} = \cos q \end{cases}$$

alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc} \operatorname{Tg} \frac{\cos q}{\sin q} = -\operatorname{arc} \operatorname{Tg} (\cot q) = -\left(\frac{\pi}{2} - q\right) + C$$

L'autre formule est $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = q + C$ or ces deux valeurs ne diffèrent que par une constante.

Reprenons enfin l'expression

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2 - x^4}}$$

Nous avons trouvé pour l'intégrale des arcs Tang., et, dans un cas particulier, une forme plus simple, un arc Sinus. — on peut encore trouver ici un arc Sinus, en ramenant l'expression au type $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour

cela,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+b^2-(x-b)^2}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{a+b^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}}\right)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \arcsin \frac{x-b}{\sqrt{a+b^2}} + C.$$

Cette dernière formule est satisfaisable aux précédentes.

car. Cela du Second Degré, l'intégration est en général impossible. ainsi, on ne sait pas intégrer

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

d'Évaluation des quinquèmes impaires est toujours possible. (Quomodo?)

Cas particuliers :

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}$$

en posant $x^2 = z$, on retombe sur les Radicaux du 2^e Degré.

Différentielle Binôme.

La forme est $x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$

p étant irratiounellement fractionnaire, nous prendrons

$$x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx.$$

on peut ramener à ce type d'autres expressions qui paraissent moins simples. ainsi

$$x^{m-1} (ax^r + bx^n)^{\frac{p}{q}} = x^{m+\frac{rp}{q}-1} (a+bx^{n-r})^{\frac{p}{q}}$$

m et n peuvent toujours être regardés comme entiers. car

si l'on a $x^{\frac{r}{s}} = z^{\frac{f}{s}}$

$$x^{m-1} (a+bx^{\frac{f}{s}})^{\frac{p}{q}}$$

en posant $x = z^{\frac{s}{f}}$ on sera ramené à une fonction de même forme.

Enfin, n peut toujours être regardé comme positif. car

$$x^{m-1} (a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}} = x^{m-1-\frac{np}{q}} (ax^n+b)^{\frac{p}{q}} = x^{m-n\frac{p}{q}-1} (b+ax^n)^{\frac{p}{q}}$$

donc

$$y = \int x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$$

m et n entiers, n positif.

Soit $a+bx^n = z^q$

alors

$$x^n = \frac{z^q - a}{b}$$

$$u^m = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}}$$

$$m u^{m-1} dx = \frac{m}{n} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} \frac{q z^{q-1}}{b} dz$$

$$u^{m-1} dx = \frac{q z^{q-1}}{n b} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} dz$$

Donc, substituant,

$$y = \frac{q}{n b} \int \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} z^{p+q-1} dz$$

On voit donc que si $\frac{m}{n} - 1$, ou $\frac{m}{n}$ par conséquent, est un nombre entier, l'intégration est ramenée à celle des fonctions rationnelles.

Il y a un second cas où l'on peut intégrer. on a

$$a + b x^n = x^n (b + a x^{-n})$$

Donc

$$y = \int x^{m + \frac{np}{q} - 1} (b + a x^{-n})^{\frac{p}{q}} dx$$

appliquant ici le corollaire précédent, on voit que si

$$\frac{m + \frac{np}{q}}{n} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$$

est un nombre entier, l'intégration est possible. alors, on devra poser

$$b + a x^{-n} = z^q$$

ou

$$a + b x^n = x^n z^q$$

Mais ces deux cas, on ne sait rien de général.

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient évidemment si m et n n'étaient pas entiers.

applications. — Soit

$$y = \int x^3 (a + bx^2)^{\frac{7}{3}} dx$$

la première condition est remplie. ^(p) nous

$$a + bx^2 = z^3$$

$$x^2 = \frac{z^3 - a}{b}$$

$$x^4 = \frac{(z^3 - a)^2}{b^2}$$

$$x^3 dx = \frac{3}{2b^2} (z^3 - a) z^2 dz$$

Ainsi

$$y = \frac{3}{2b^2} \int (z^3 - a) z^2 dz = \frac{3}{2b^2} \left(\frac{z^9}{9} - \frac{az^6}{6} \right) + C$$

$$y = \frac{3}{2b^2} \left\{ \frac{(a + bx^2)^3}{9} - \frac{a}{6} (a + bx^2)^2 \right\} + C$$

$$y = \frac{(a + bx^2)^2}{2b^2} \left(\frac{a + bx^2}{3} - \frac{a}{2} \right) + C$$

Soit encore

$$y = \int x^2 (a + bx^2)^{\frac{5}{4}} dx$$

La seconde condition seule est remplie.

$$a + bx^2 = x^2 z^4$$

$$x^2 = \frac{a}{z^4 - b}$$

$$x^4 = \left(\frac{a}{z^4 - b} \right)^2$$

$$x^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z^4 - b} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2az dz}{(z^4 - b)^2} = - \frac{a^{\frac{1}{2}} z dz}{(z^4 - b)^{\frac{5}{2}}}$$

avec cela

$$(a + bx^2)^{\frac{5}{4}} = (x^2 z^4)^{\frac{5}{4}} = z^5 x^{\frac{5}{2}} = z^5 \cdot \left(\frac{a}{z^4 - b} \right)^{\frac{5}{4}}$$

Donc enfin

$$y = - \int \frac{a^k z^k dz}{(z^2 - b)^5}$$

Résultat Rationnel et facile à Intégrer.

on peut appliquer l'intégration par parties, mais elle ne donne rien de plus.

Soit

$$y = \int x^{m-1} (a+bx^n)^p dx$$

Faisons

$$u = z$$

alors

$$y = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n}-1} (a+bx)^p dx$$

Même pouvons donc toujours prendre

$$y = \int x^{m-1} (a+bx)^p dx$$

ou en général étant devenu fractionnaire, de même que p .

D'abord, on toujours s'arranger de façon que m et p deviennent compris entre 0 et 1.

En effet, cherchons d'abord à abaisser l'exposant m .

on a

$$y = x^{\frac{m-1}{p+1}} \frac{(a+bx)^{p+1}}{b(p+1)} - \frac{m-1}{b(p+1)} \int (a+bx)^{p+1} x^{\frac{m-2}{p+1}} dx$$

Ce 1^{er} Résultat serait excellent si l'on avait $m > 0$, $p < 0$.

Mais, en général, il ne faut pas que p change. et

$$(a+bx)^{p+1} = (a+bx)^p (a+bx) = a(a+bx)^p + bx(a+bx)^p$$

Donc

$$y = x^{\frac{m-1}{p+1}} \frac{(a+bx)^{p+1}}{b(p+1)} - \frac{(m-1)a}{b(p+1)} \int (a+bx)^p x^{\frac{m-2}{p+1}} dx - \frac{m-1}{p+1} \int x^{\frac{m-1}{p+1}} (a+bx)^p dx$$

La dernière Intégrale représente justement y . donc,
en réduisant,

$$\frac{p+m}{p+1} \int x^{m-1} (a+bx)^p dx = \frac{x^{m-1} (a+bx)^{p+1}}{b(p+1)} - \frac{(m-1)a}{(p+1)b} \int x^{m-2} (a+bx)^p dx$$

et enfin

$$\int x^{m-1} (a+bx)^p dx = \frac{x^{m-1} (a+bx)^{p+1}}{b(p+m)} - \frac{(m-1)a}{(p+m)b} \int x^{m-2} (a+bx)^p dx$$

Répétant cette opération sur la dernière Intégrale, on arrive
- en ainsi, après un nombre convenable d'opérations, à ce que
l'exposant m soit compris entre 0 et 1.

Secondement, on peut en faire autant pour p . Car,
 $x^m dx$ étant une différentielle exacte, on a

$$\int x^m dx (a+bx)^p = \frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{b p}{m+1} \int x^{m+1} (a+bx)^{p-1} dx$$

Or, on a

$$b a x^{m+1} = b a \cdot x^m = (a+bx) x^m - a x^m$$

Donc

$$\int x^m dx (a+bx)^p = \frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{p}{m+1} \int (a+bx)^p x^m dx + \frac{ap}{m+1} \int x^m (a+bx)^{p-1} dx$$

Donc

$$\int x^m (a+bx)^p dx = \frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{m+p+1} + \frac{ap}{m+p+1} \int (a+bx)^{p-1} x^m dx$$

c'est là la formule de réduction pour l'exposant p .

Elle devient illusoire pour $m+p+1=0$: mais alors on
- s'en rend compte. Dans le 2^e cas d'intégrabilité donné plus
haut, celui où $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \text{entier}$. Car ici m et p représen-
tent $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ et leur somme est -1. - Si $a=0$, on n'a

On a pour un cas d'intégrabilité nouveau, car on a alors une différentielle monôme.

Cette méthode ne donne rien de nouveau, mais elle ramène la difficulté à sa plus simple expression.

La dernière formule, au lieu de satisfaire à la condition demandée, compliquerait le résultat si p était négatif. Nous alors, en résolvant la dernière équation par rapport à l'autre intégrale, on aurait

$$\int (a+bx)^{p-1} x^m dx = -\frac{(a+bx)^p x^{m+1}}{ap} + \frac{m+p+1}{ap} \int x^m (a+bx)^p dx$$

et, mettant le signe de p en évidence, et posant $p-1 = -p$

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^p} = \frac{x^{m+1}}{a(p-1)(a+bx)^{p-1}} - \frac{m-p+2}{a(p-1)} \int \frac{x^m dx}{(a+bx)^{p-1}}$$

Comme application de notre dernière formule, prenons

$$y = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ou

$$y = \int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Si m est impair, on a $\frac{m+1}{n} = \text{entier}$: Si m est pair, $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ est entier : donc l'intégration est toujours possible.

Intégrons par parties (on pourrait appliquer la 1^{re} formule de réduction pour m) :

$$\int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{m-1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = -x^{m-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (m-1) \int x^{m-2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

ou on a

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

donc

$$y = -x^{m-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (m-1) \int x^{m-1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx - (m-1) y$$

ou

$$y = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et, si m est entier, on arrivera ainsi à l'une des formules

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

qu'on sait intégrer.

Voici le résultat :

1°. m pair :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \left\{ \frac{x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \frac{x^{m-3}}{2m-2} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{2m-2} \frac{x^{m-5}}{2m-4} + \dots \right\} \sqrt{1-x^2} \\ + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\dots 5.3.1}{m(2m-2)(2m-4)\dots 6.4.2} \arcsin x + C$$

2°. m impair :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \left\{ \frac{x^m}{m+1} + \frac{m}{m+1} \frac{x^{m-2}}{2m-1} + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-2}{2m-1} \frac{x^{m-4}}{2m-3} + \dots \right\} \sqrt{1-x^2} + C$$

Si m était négatif, que faudrait-il faire ?

N'en pas faire.

Intégration des
Différentielles Transcendantes.

Naturel, il y a certains cas où l'on peut passer
des fonctions transcendentes aux fonctions algébriques.

En effet, soit

$$f(e^x) dx$$

$$f(\sin x) dx$$

$$f(\cos x) dx$$

ou

$$f(\cos x, \sin x) dx$$

f étant une fonction algébrique.

Pour $f(e^x) dx$, soit

$$y = e^x$$

$$dx = \frac{dy}{y}$$

Donc

$$\int f(e^x) dx = \int f(y) \frac{dy}{y}$$

Pour $f(\sin x) dx$, soit

$$y = \sin x$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

De même pour $f(\cos x) dx$.

Enfin, dans la dernière, il viendrait $\int f(y, \sqrt{1-y^2}) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

Dans le dernier cas, si l'on pose

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

on a

$$dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2} dy = \frac{2 dy}{1+y^2}$$

et

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

on a donc

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int \frac{2 f\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) dy}{1+y^2}$$

où tout est rationnel.

Revenons au cas Général.

Maintenant, il y a des expressions transcendentes qui sont immédiatement intégrables.

ainsi :

$$\int (ax)^m \frac{dx}{x} = \frac{(ax)^{m+1}}{m+1} + C$$

et beaucoup d'autres formes analogues, comme

$$\int (\sin x)^m \cos x dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C$$

$$\int (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^m \frac{dx}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{m+1}}{m+1} + C$$

De même encore

$$\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m \log a} + C.$$

Un cas plus étendu se présente pour l'intégration par parties.

Supposons

$$y = \int a^x p dx$$

p étant une fonction rationnelle et entière, on a

$$y = \frac{a^x}{\log a} p - \frac{1}{\log a} \int a^x \cdot \frac{dp}{dx} dx$$

en continuant, on ramènera p à une constante.

Si, il y a plusieurs lacunes: par exemple:

Intégration des fonctions Expon Transcendantes.

Intégration par Séries.

Intégrales Définies.

Voir tout ce qui manque, p. 503 et suivantes.

Intégrales Euleriennes.

La formule Générale Des Intégrales Euleriennes De Seconde espèce est

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Quelle peut être la valeur de cette Intégrale? — En Général on a, en intégrant par parties,

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \int e^{-x} x^{n-2} dx$$

Il s'agit de passer De là aux Intégrales Définies. or, pour $x=0$, $e^{-x} x^{n-1}$ est nul; pour $x=\infty$, $e^{-x} x^{n-1} = 0 \cdot \infty$; mais il est facile de voir que la vraie valeur est 0: car

$$e^{-x} x^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \dots}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{x}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots}$$

et, sous cette forme, il devient évident que, si x augmente indéfiniment, la limite est zéro. Donc enfin

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx$$

ou

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1)$$

or, comme $\Gamma(1) = 1$, on a donc, si n est entier

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Donc

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 1.2$$

i

$$\Gamma(n) = 1.2.3 \dots (n-1)$$

Si n n'est pas entier, la formule de réduction s'appliquera du moins jusqu'à ce qu'on soit ramené à une intégrale $\Gamma(r)$, r étant compris entre 0 et 1. Si donc, pour $r \geq 0$, on a dressé d'avance une table des valeurs de $\Gamma(r)$, on pourra toujours avoir, au moins approximativement, l'intégrale Eulerienne de seconde espèce.

Si n est négatif, cette intégrale n'a plus de valeur: elle devient infinie; en effet, la valeur de $\Gamma(n)$ devenant alors $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x x^{n+1}}$, j'observe que tous ses éléments sont essentiellement positifs; il me suffira donc de démontrer que $\int_a^\infty \frac{dx}{e^x x^{n+1}}$ est infini. or, prenons d'abord $\int_a^1 \frac{dx}{e^x x^{n+1}}$. on a évidemment

$$\int_a^1 \frac{dx}{e^x x^{n+1}} > \int_a^1 \frac{dx}{e^x x} > \left\{ \frac{1}{e} \mathcal{L} x \right\}_{x=a}^{x=1} > \frac{1}{e} \mathcal{L} \frac{1}{a}$$

et, pour $a=0$, $\mathcal{L} \frac{1}{a} = \infty$: donc la proposition est démontrée.

Pour les intégrales Euleriennes de première espèce, prenons la d'abord sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$$

et posons $x = \sin^2 \theta$, d'où $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$, et $\sin \theta = x^{\frac{1}{2}}$
 $\cos \theta = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, par suite $d\theta = \frac{1}{2} dx \cdot x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ et enfin
 $\sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = B(p, q)$$

Double expression De l'Intégrale Eulerienne De 1^{re} espèce, q^uon représente habituellement par $B(p, q)$. - Cette intégrale se présente sous la forme d'une intégrale De différentielle binôme, cas pour lequel on a donné deux formules De réduction, suivant qu'on veut abaisser p ou q d'une unité exposant. Ces formules (p. 223) deviennent ici

$$\int x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{x^{p-1} (1-x)^q}{-(p+q-1)} + \frac{p-1}{p+q-1} \int x^{p-2} (1-x)^{q-1} dx$$

$$\int x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{x^p (1-x)^{q-1}}{-(p+q-1)} + \frac{q-1}{p+q-1} \int x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx$$

Donc

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$$

Ces fonctions Euleriennes De 2^e espèce peuvent d'ailleurs se ramener à celles De 1^{re} espèce par la formule très-simple.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Dont nous allons donner une démonstration à posteriori : on peut écrire.

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2p-1} dy$$

en posant $x = y^2$ dans la formule connue ; et De même

$$\Gamma(q) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2q-1} dx$$

Donc

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy$$

or cela représente le volume compris entre le plan des xy

et la surface qui aurait pour Equation

$$(1) \quad z = e^{-\frac{(x^2+y^2)^{2q-1}}{2q-1}}$$

Choisissons à calculer ce volume d'une autre manière: et pour cela, changeons les variables, en prenant

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \text{angle } mox$$

et conservant z . Calculons l'élément de volume dv qui a pour base $mnst$. Nous aurons

$$mnst = tos - mon = \frac{1}{2}(r+dr)^2 d\theta - \frac{1}{2}r^2 d\theta \\ = r dr d\theta$$

$$dv = z r dr d\theta = r e^{-\frac{r^{2q-1}}{2q-1}} \cos^2 \theta \sin^{2p-1} \theta dr d\theta$$

$$dv = e^{-\frac{r^{2q-1}}{2q-1}} r^{2p+2q-1} \cos^2 \theta \sin^{2p-1} \theta dr d\theta$$

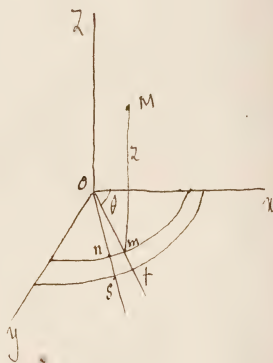
on voit facilement que la surface est asymptotique au plan des xy : Donc il faut intégrer de 0 à ∞ pour r , et évidemment de 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour θ , afin d'avoir la portion de volume comprise entre la surface et les 3 plans coordonnés positifs, seule partie représentée par l'intégrale double qui entre dans la valeur de $\Gamma(p)\Gamma(q)$. Donc

$$V = \int_0^\infty dr \left[r^{2p+2q-1} e^{-\frac{r^{2q-1}}{2q-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^{2p-1} \theta d\theta \right]$$

r et θ sont tout-à-fait indépendants l'un de l'autre. on peut donc séparer les deux intégrales, de façon qu'on a définitivement:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2 \int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-\frac{r^{2q-1}}{2q-1}} dr \times 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^{2p-1} \theta d\theta \\ = \Gamma(p+q) \cdot B(p, q) \quad \text{c q f d.}$$

Cette formule:



$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Donne, en y changeant p en $p-1$ pour exemple,

$$B(p-1, q) = \frac{\Gamma(p-1) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q-1)} = \frac{\frac{1}{p-1} \Gamma(p) \Gamma(q)}{\frac{1}{p+q-1} \Gamma(p+q)} = \frac{p+q-1}{p-1} B(p, q)$$

formule déjà trouvée précédemment.

Les intégrales Euleriennes de première espèce, comme celles de seconde, deviennent infinies quand les exposants sont négatifs. La démonstration est la même.

Intégration Des Fonctions De Plusieurs Variables.

on sait que si:

$$u = f(x, y)$$

on a

$$du = M dx + N dy \quad \begin{cases} M = \frac{du}{dx} = \varphi(x, y) \\ N = \frac{du}{dy} = \psi(x, y) \end{cases}$$

On sait toujours trouver du.

Plus précisément, étant donné

$$du = M dx + N dy$$

comment pourra-t-on retrouver la fonction u?

Et d'abord, cette fonction existe-t-elle toujours?

Remarquons que l'on a

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2u}{dy dx}$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2u}{dx dy}$$

Ainsi il faut que l'on ait

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$$

condition toujours nécessaire. Est-elle suffisante? c'est ce que le calcul va démontrer.

Probat. que si je prends $\int M dx$, u n'en pourra différer que par une fonction de y, puisque M est la dérivée de u par rapport à x, et que par suite u ne peut continuer

même terme en x qui n'ait concouru à la formation
de M . Je pourrais donc poser

$$u = \int M dx + Y$$

reste à trouver Y . - Mais maintenant, pour que cette
dernière égalité ait réellement lieu, il faudra que l'on ait
 $\frac{du}{dy} = N$, i.e.

$$N = \frac{d \int M dx}{dy} + \frac{dY}{dy}$$

Si l'on pose pour abréger

$$\int M dx = V$$

il vient

$$N - \frac{dV}{dy} = \frac{dY}{dy}$$

d'où

$$Y = \int \left(N - \frac{dV}{dy} \right) dy + C$$

à présent, pour que cette valeur puisse nous convenir, il
faut que, sous le signe \int , il ne reste point d' x , donc
que la dérivée par rapport à x de la quantité entre
parenthèses soit identiquement nulle, et qu'on ait

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2V}{dy dx} = 0$$

ou

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d}{dy} \frac{dV}{dx} = 0$$

c.à.d.

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} - \frac{d^2V}{dy dx} = 0 \\ \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0 \end{array} \right\} \text{ car } V = \int M dx$$

condition déjà connue, et qu'on voit ainsi être nécessaire
et suffisante.

on aura donc enfin

$$(1) \quad u = \int M dx + \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy + C$$

Noter à laquelle on peut encore donner une autre forme.
Car

$$\frac{d \int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} \cdot dx = \int \frac{dN}{dx} \cdot dx$$

Donc qu'on aura encore

$$(2) \quad u = \int M dx + \int \left(N - \int \frac{dN}{dx} \cdot dx \right) dy + C$$

forme moins simple que la précédente pour le calcul, puisque
une différentiation dans celle-ci est remplacée dans la dernière
par une intégration.

Exemple. — Soit la fonction

$$du = \left\{ \frac{1}{x} - \left(\frac{y}{x-y} \right)^2 \right\} dx + \left\{ \left(\frac{x}{x-y} \right)^2 - \frac{1}{y} \right\} dy$$

on aura

$$\int M dx = \int x - y^2 \int \frac{dx}{(x-y)^2} = \int x + \frac{y^2}{x-y}$$

$$\int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy} \right) dy = \int \left\{ \left(\frac{x}{x-y} \right)^2 - \frac{1}{y} - \frac{2y(x-y) + y^2}{(x-y)^2} \right\} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y} \right) dy = y - \int \frac{1}{y}$$

Avec enfin

$$u = \frac{y^2}{x-y} + y + \int \frac{x}{y} + C$$

$$u = \int \frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} + C$$

Quelquefois, on présente la valeur de u sous une autre forme
qui peut être utile. Reprenons l'expression

$$du = M dx + N dy$$

Alors, on aura

$$u = \int M dx + Y$$

ce que l'on pourra écrire avec tout autant de généralité,

De cette manière :

$$u = \int_{x_0}^x M dx + Y$$

Reste à trouver Y . Or, on a vu de là

$$u - \int_{x_0}^x M dx = Y$$

Différenciant par rapport à y , et Remarquant que $\frac{du}{dy} = N$,
on aura

$$N - \int_{x_0}^x \frac{dM}{dy} dx = \frac{dY}{dy}$$

ou

$$N - \int_{x_0}^x \frac{dN}{dx} dx = \frac{dY}{dy}$$

Prenons, pour plus de symétrie,

$$M = Q(x, y)$$

$$N = V(x, y)$$

Il vient

$$V(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{dV(x, y)}{dx} dx = \frac{dY}{dy}$$

Mais

$$\int \frac{dV(x, y)}{dx} dx = V(x, y) + C$$

C contenant y ; et

$$\int_{x_0}^x \frac{dV(x, y)}{dx} dx = V(x, y) - V(x_0, y)$$

Donc

$$\frac{dY}{dy} = V(x_0, y)$$

Donc

$$Y = \int_{y_0}^y V(x_0, y) dy + C$$

On a enfin

$$u = \int_{x_0}^x Q(x, y) dx + \int_{y_0}^y V(x_0, y) dy + C$$

Dans la pratique, cette méthode n'a point d'avantages, à cause de la multiplicité des constantes qu'elle introduit dans le calcul.

Cas de Trois Variables.

Soit

$$du = Mdx + Ndy + Pdz$$

Cherchons d'abord les conditions de possibilité. Or, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{du}{dx} \\ N = \frac{du}{dy} \\ P = \frac{du}{dz} \end{array} \right.$$

Ainsi il faut qu'on doit avoir nécessairement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \\ \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \\ \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \end{array} \right.$$

et, en général, s'il y avait m variables, on voit aisément qu'on obtiendrait ainsi $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions nécessaires. Sont-elles suffisantes? C'est ce que nous allons voir.

Je considère d'abord tout ce qui dépend de x et de y : et j'aurai évidemment

$$u = \int (Mdx + Ndy) + Z$$

et cette première intégration sera possible, puisque $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$.

Posons

$$dV = Mdx + Ndy$$

alors il vient:

$$u - v = Z.$$

différentiant :

$$\frac{du}{dz} - \frac{dv}{dz} = \frac{dz}{dz}$$

$$Z = \int \left(P - \frac{dv}{dz} \right) dz + C$$

Il doit être fonction de z seulement, il faut que, sous le signe \int , il n'y ait plus x ni y : Donc que l'on ait :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz} - \frac{d^2v}{dz^2 dz} = 0 \\ \frac{dP}{dy} - \frac{d^2v}{dz dy} = 0 \end{cases}$$

conditions qui rentrent dans les deux dernières des trois qu'on a trouvées d'abord : car

$$\frac{d^2v}{dz dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dv}{dz} \right) = \frac{dM}{dz}$$

D'où

$$\frac{d^2v}{dz dy} = \frac{dN}{dz}$$

ainsi, les trois conditions trouvées sont suffisantes, et l'on a

$$u = \int M dz + \int \left(N - \frac{d \int M dz}{dy} \right) dy + \int \left(P - \frac{dv}{dz} \right) dz + C$$

v étant la somme des deux premières intégrales : De sorte que la formule complète est

$$u = \int M dz + \int \left(N - \frac{d \int M dz}{dy} \right) dy + \int \left[P - \frac{d \left\{ \int M dz + \int \left(N - \frac{d \int M dz}{dy} \right) dy \right\}}{dz} \right] dz + C$$

Si, comme pour deux variables, on pose

$$\begin{cases} M = \alpha(x, y, z) \\ N = \beta(x, y, z) \\ P = \pi(x, y, z) \end{cases}$$

on arrivera facilement à la formule

$$u = \int_{x_0}^x \varphi(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y \psi(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z \pi(x_0, y_0, z) dz + C$$

on peut d'ailleurs démontrer à posteriori l'exactitude de cette formule par une vérification, en faisant voir que

$$\frac{du}{dx} = M \quad \frac{du}{dy} = N \quad \frac{du}{dz} = P$$

et, on a d'abord

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z)$$

puisque x n'intervient que dans la première partie.
Maintenant

$$\frac{du}{dy} = \psi(x_0, y, z) + \int_{x_0}^x \frac{d \cdot \varphi(x, y, z)}{dy} dx$$

$$= \psi(x_0, y, z) + \int_{x_0}^x \frac{d \cdot \psi(x, y, z)}{dx} dx$$

$$= \psi(x_0, y, z) + \psi(x, y, z) - \psi(x_0, y, z)$$

$$\frac{du}{dy} = \psi(x, y, z)$$

Enfin, de même

$$\frac{du}{dz} = \pi(x_0, y_0, z) + \int_{x_0}^x \frac{d \cdot \varphi(x, y, z)}{dz} dx + \int_{y_0}^y \frac{d \cdot \psi(x_0, y, z)}{dz} dy$$

$$= \pi(x_0, y_0, z) + \int_{x_0}^x \frac{d \cdot \pi(x, y, z)}{dz} dx + \int_{y_0}^y \frac{d \cdot \pi(x_0, y, z)}{dy} dy$$

$$= \pi(x_0, y_0, z) + \pi(x, y, z) - \pi(x_0, y, z) + \pi(x_0, y, z) - \pi(x_0, y_0, z) +$$

$$\frac{du}{dz} = \pi(x, y, z)$$

La formule est donc démontrée, et par là

prolet qui prouve en outre qu'elle est Générale.

Théorie De l'Intégration
Des
Equations Différentielles.

L'origine Des Equations Différentielles est connue.
Si l'on a l'Equation

$$(1) \quad f(x, y, c) = 0$$

c Designant un paramètre quelconque: Si l'on Différentie

$$(2) \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

l'Eq. (2) est l'Equation Différentielle Immédiate: elle contient c en Général. Si l'on élimine ce paramètre entre les Equations (1) et (2), on aura une Equation

$$(3) \quad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

indépendante De c, et exprimant une propriété Générale De la Tangente aux Courbes Diverses représentées par l'Eq. (1).
C'est l'Equation Différentielle proprement Dite.

Il s'agit maintenant, Etant Donnée l'Eq. (3), De remonter à l'Eq. (1), c.àd. De trouver une Equation finie entre x et y, dont l'Eq. (3) soit la conséquence. Nous Démontrons plus loin qu'il existe toujours une telle Equation, que

nous apprendrons même à trouver soit exactement et sous forme finie, soit approximativement et à l'aide Des séries, et qu'on désigne sous le nom d'Intégrale Del' Eq. Différentielle proposée.

Montrons seulement ici que, étant donnée une Eq. Différentielle Du 1^{er} ordre

$$(1) \quad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

pour quelle Equation qui en est l'Intégrale ait toute la généralité Dérivable, il faut qu'elle contienne une Constante.

En effet, dans l'Eq. (1), on peut se donner à volonté $x=a$ et $y=b$, et alors seulement l'Eq. fait connaître $\frac{dy}{dx}$, c.àd. la Tangente au point arbitrairement choisi (a, b) . Donc l'intégrale doit être telle que la Courbe qu'elle représente passe par un point quelconque du plan. Donc cette intégrale doit être de la forme

$$q(x, y, c) = 0$$

Mais elle ne peut contenir deux constantes. Car si elle était

$$q(x, y, c, c') = 0$$

en la différenciant, j'aurais une nouvelle Equation

$$\frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$$

contenant aussi c et c' : De façon que, d'après le système De ces deux Equations, je pourrais arbitrairement me donner et le point (a, b) et la Tangente en ce point, ce qui n'a pas lieu quand on se reporte à l'Eq. Différentielle proposée.

On peut aussi remarquer que l'Eq. Différentielle elle-même fournit une suite De points dont l'ensemble Diffère De moins en moins De la courbe Intégrale qu'il s'agit plus rapproché

Il en est l'autre. En effet, cette Équation, quand on s'est
 donné un point m , détermine la Tangente en ce point: et,
 dans le voisinage du point m , la Tangente peut être prise
 pour la courbe, à un Infinitement petit du second ordre près.
 Si donc, sur la Tangente, on prend un second point voisin
 de m , et qu'on agisse pour lui comme pour le précédent,
 on aura une série de points qui donnera une idée très-ap-
 proximative de l'une des courbes intégrales.

Equations Différentielles

Du

Premier Ordre.

Ce sont celles où $\frac{dy}{dx}$ n'intre qu'au 1^{er} degré. Elles sont
De la forme

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M dx + N dy = 0$$

Il s'agit de voir comment et dans quels cas on peut intégrer
une pareille Equation.

Nous considérons plus loin les Equations du 1^{er} ordre qui
contiennent des puissances de $\frac{dy}{dx}$.

1^o. Intégration Immédiate.

Il peut arriver que $M dx + N dy$ soit une différentielle exacte.
alors l'intégrale de l'Equation s'obtiendra évidemment en égalant
à une constante celle de son 1^{er} membre.

Si par exemple l'Equation était $x dy + y dx - x dx + y dy = 0$, son intégrale serait
 $\int (x dx + y dy) = 0$, r. a. d. $x^2 + y^2 = C$, Equation qui représenterait une infinité de cercles
concentriques.

Mais ce cas si particulier est extrêmement rare. En effet:

Soit pour exemple

$$\frac{y dy + (x - 2y) dx}{(y - x)^2} = 0$$

Le 1^{er}. membre est une différentielle exacte : car il est facile de voir que $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = \frac{2y}{(y-x)^2}$. Cela posé, si l'on cherche l'intégrale, on trouvera avec facilité que $\int M dx = \int (y-x) + \frac{y}{y-x}$; que $\int (N - \frac{dM}{dy}) dy = 0$, et que par conséquent l'intégrale de l'équation différentielle proposée est

$$\int (y-x) + \frac{y}{y-x} = C$$

Ici, la facilité de l'intégration tient uniquement à la présence du facteur $\frac{1}{(y-x)^2}$ dans le 1^{er}. membre de l'Eq. Différentielle. Mais on conçoit et fort bien que, dans la plupart des cas, ce facteur aura été supprimé dans le courant des calculs, et qu'il n'est par exemple, on en a donné le plus souvent l'équation ci-dessus sous la forme

$$y dy + (x - 2y) dx = 0$$

et le 1^{er}. membre ne serait plus une différentielle exacte : souvent on ne pourra plus alors intégrer. — Plus loin, nous prouverons que, quand le 1^{er}. membre d'une Eq. Différentielle n'est pas une différentielle exacte, il existe toujours un facteur, et même une infinité, qui le ramènent à ce cas : et nous en déduisons une méthode d'intégration due à Euler.

Toutes les fois qu'il y a eu ainsi suppression de facteurs, nous manquons de méthode générale pour intégrer même l'équation différentielle du 1^{er}. ordre et du 1^{er}. degré en $\frac{dy}{dx}$.

Mais allons exposer divers autres cas particuliers dans lesquels on y est parvenu.

2°.- Méthode De la Séparation Des Variables.

Cette méthode s'applique toutes les fois que l'équation différentielle peut être ramenée à la forme

$$q(x) dx = \sqrt{1} (y) dy$$

Car alors on aura immédiatement

$$\int q(x) dx = \int \sqrt{1} (y) dy + C$$

Exemples.

1°. Soit l'équation $x dy - y dx = 0$ (1).

Où

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$dy = \frac{y}{x} dx + C$$

$$y = cx$$

Cette équation (1) peut d'ailleurs s'intégrer aussi en rétablissant un facteur. Si on l'écrit $\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$ on voit qu'elle devient $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ donc $y = cx$.

2°. Si l'on avait $x dy - ay dx = 0$, la division par x^2 ne rendrait plus : mais on pourrait séparer les variables. - D'ailleurs, si y a une autre manière encore. Multiplions par x^{a-1} : on a $x^a dy - ay x^{a-1} dx = 0$, ou bien $x^a dy - y d(x^a) = 0$, et, si $x^a = z$, $z dy - y dz = 0$, donc $y = cz = cx^a$.

3°. Soit encore l'équation

$$xy dx + x_1 y_1 dy = 0$$

En divisant par xy , on aura

$$\frac{x}{x_1} dx + \frac{y_1}{y} dy = 0$$

qu'on peut intégrer.

Dans le cas des équations homogènes, on peut toujours effectuer la séparation des variables. - En effet, l'équation différentielle peut alors toujours s'écrire

$$x^m q\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^m \sqrt{1} \left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

alors, en posant $\frac{y}{x} = z$, où $dy = x dz + z dx$, et divisant

pour x^m , il vient

$$\begin{aligned} \varphi(z) \cdot dx + \psi(z) \{x dx + z dz\} &= 0 \\ \{ \varphi(z) + z \psi(z) \} dx + \psi(z) \cdot x dz &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z) + z \psi(z)} dz &= 0 \end{aligned}$$

et l'on voit que les Variables sont séparées.

Ce cas étant assez fréquent, en voici quelques exemples.

1°. Soit l'Equation $(x-2y)dx + ydy = 0$. - Je pose $\frac{y}{x} = z$, j'y remplace x et y , d'où par x . Il vient $(1-2z)dx + z(2dx + xdz) = 0$; d'où

$$\frac{dx}{x} = - \frac{2dz}{1-2z+z^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{2dz}{1-2z+z^2}$$

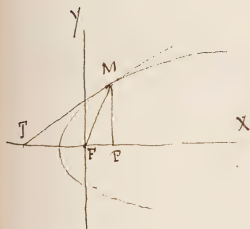
On a donc $\frac{2}{(z-1)^2} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{z-1}$, d'où $2 = A + B(z-1)$ ou $2(1-B) = A - B$, d'où

$A = B = 1$; il vient

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{dz}{(z-1)^2} - \int \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \int \frac{dz}{z-1} + C$$

ou bien, en remplaçant z par sa valeur,

$$\int \frac{dx}{y-x} = \frac{1}{y-x} - \int \frac{dy}{y-x} + C, \quad \int \frac{dy}{y-x} = \frac{y}{y-x} + C, \quad y-x = C e^{\frac{x}{y-x}}.$$



2°. On sait que, dans une parabole rapportée à son foyer et à deux axes orthogonaux dont l'un est son diamètre principal, le rayon vecteur PM est égal à la tangente. ET compris, sur l'axe des x , entre le foyer et la tangente en M. - Si maintenant on veut savoir si la parabole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété, il faudra avoir recours au calcul différentiel. - Supposons que $PM = PT$. or $PM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $PT = PT - PF = y \frac{dy}{dx} - x$. Soit l'Eq. différentielle du problème et

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x) dy = y dx$$

Cette Equation est homogène: on peut donc l'intégrer. on aura

$$(\sqrt{1+z^2} + 1)(zdx + xdz) = zdx$$

$$zdx\sqrt{1+z^2} + z(\sqrt{1+z^2} + 1)dz = 0$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{\sqrt{1+z^2} + 1}{2\sqrt{1+z^2}} dz = 0$$

d'où

$$\int \frac{dz}{z} = - \int \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{1+z^2}} dz = - \int \frac{dz}{2} - \int \frac{dz}{2\sqrt{1+z^2}}$$

La dernière intégrale pourrait se trouver par la méthode générale, mais il y a un moyen plus simple: car

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{z}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}} = - \int \frac{d\frac{1}{z}}{\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}} = - \int \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} \right)$$

Avec enfin l'intégrale et

$$2x = \int \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + 1} \right) - \int 2 + \int c = \int \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + y^2} \right) - \int \frac{y}{x} + \int c$$

$$\int x = \int \left(c \frac{x}{y} \sqrt{x^2 + y^2} + c \frac{x^2}{y^2} \right)$$

$$y^2 = c(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(y^2 - cx)^2 = c^2(x^2 + y^2)$$

$$y^4 - 2cxy^2 = c^2y^2$$

$$y^2 = 2cx + c^2$$

Equation générale des Paraboles qui ont F' pour foyer et Fx pour axe.

3°. Comme dernière application du cas des Equations Homogènes, occupons-nous du problème des Trajectoires. on suppose qu'on donne une Equation

$$(1) \quad f(x, y, c) = 0$$

qui représente une infinité de courbes. on demande une courbe qui les coupe toutes sous un même angle donné.

Soit K la tangente trigonométrique de cet angle, AB une des courbes représentées par l'éq. (1), MN la courbe demandée. Soient x et y les coordonnées du point m . Le coefficient angulaire de la tangente en m à la courbe MN est $a' = \frac{dy}{dx}$; à la courbe AB , c'est $a = -\frac{(\frac{df}{dx})}{(\frac{df}{dy})}$. on doit donc avoir

$$K = \frac{a' - a}{1 + aa'} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \right) : \left(1 - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \right)$$

ou bien

$$(2) \quad K \left(\frac{df}{dy} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx}$$

C'est là une condition du problème. Cette Equation renferme c . Si l'on élimine c entre les Equations (1) et (2), on aura un résultat

$$(3) \quad \varphi(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

qui sera l'éq. différentielle de la courbe, ou plutôt des courbes demandées, puisque l'on voit ainsi, si on ne l'avait pas prouvé à priori, que le problème admet une infinité de solutions.

Mais ne pouvons nous l'élimination en général. Nous prenons le cas particulier de courbes paraboliques et hyperboliques, renfermées dans l'Equation

$$(1) \quad y^m = cx^n$$

L'Equation (2) devient alors

$$(2) \quad K \left(mxy^{m-1} + cnx^{n-1} \frac{dy}{dx} \right) = mxy^{m-1} \frac{dy}{dx} - cnx^{n-1}$$

Si l'on multiplie par x et qu'on remplace c par sa valeur, on aura

$$K(mxy^{m-1} + ny \frac{m}{n} \frac{dy}{dx}) - mxy^{m-1} \frac{dy}{dx} + ny^m = 0$$

ou

$$(3) \quad K(m + ny \frac{dy}{dx}) - mx \frac{dy}{dx} + ny = 0$$

Cette est l'éq. différentielle du problème. Elle est homogène; on pourra donc l'intégrer.

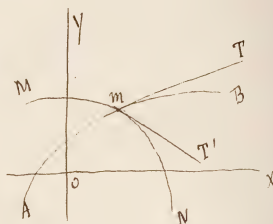
on aura successivement

$$(Kmx + ny) dx - (mx - Kny) dy = 0$$

$$(Kmx + ny) dx - (m - Knz) (x dz + z du) = 0$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{(m - Knz) dz}{Knz^2 + (n - m)z + Km}$$

Problème des Trajectoires.



$$Lx = \int \frac{(m-knz) dz}{knz^2 + (n-m)z + km}$$

Cette intégrale peut être simplifiée. Remarquons en effet que la dérivée du Dénominateur est $2knz + n-m$. on aura donc

$$\int \frac{(m-knz) dz}{knz^2 + (n-m)z + km} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2knz + n-m) dz}{knz^2 + (n-m)z + km} + \frac{m+n}{2} \int \frac{dz}{knz^2 + (n-m)z + km}$$

Malheur, évidemment

$$\int \frac{(2knz + n-m) dz}{knz^2 + (n-m)z + km} = 2 \int \frac{knz + \frac{n-m}{2}}{knz^2 + (n-m)z + km} dz + C$$

Quant à la dernière intégrale, il faut distinguer deux cas, suivant que les racines du Dénominateur égalé à zéro sont imaginaires ou réelles. Dans le 1^{er} cas on aura pour l'intégrale une arc tangente; dans le second un Logarithme.

Comme cas particulier, faisons $m=n=1$. Nous aurons

$$Lx = \int \frac{(1-kz) dz}{k(z^2+1)} = \int \frac{dz}{k(z^2+1)} - \int \frac{z dz}{k(z^2+1)} = \frac{1}{k} \int \frac{dz}{z^2+1} - \frac{1}{2} L(z^2+1) = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} L(z^2+1) + C$$

$$Lx + \frac{1}{2} L \frac{x^2+y^2}{x^2} - \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - C = 0$$

$$L \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$$

Faites et l'équation s'échappe. - Si l'on y introduit les coordonnées polaires, on y prendra $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, il vient

$$Lr = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + C = \frac{1}{k} \theta + C$$

$$r = e \cdot e^{\frac{\theta}{k}}$$

$$r = C \cdot e^{\frac{\theta}{k}}$$

Équation d'une infinité de Spirales Logarithmiques: et il était facile, depuis ce a priori résultat, puisque pour $m=n=1$, l'équation $y^m = cx^n$ se réduit à $y = cx$, et représente une série de droites passant par l'origine; la question était donc ici ramener à trouver une courbe dont la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur; et l'on sait que la Spirale Logarithmique jouit de cette propriété. Ici, d'ailleurs, le calcul différentiel vient de montrer qu'elle en jouit seule.

Si l'on veut que les Trajectoires soient Orthogonales, il faut faire M infini, ce qui réduit l'équation (1) à

$$\frac{df}{dy} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dx} = 0$$

Dans le cas des courbes

$$y^m = cx^n$$

cette équation devient, après l'élimination de c ,

$$mxdx + nydy = 0$$

D'où

$$mx^2 + ny^2 = C$$

Si m et n sont de même signe, les courbes propres sont des Paraboles, et les Trajectoires des Ellipses. Si m et n sont de signes contraires, les courbes propres sont des Hyperboles, et les Trajectoires sont d'autres Hyperboles ayant leurs axes dirigés suivant les asymptotes de première.

Proche, si l'on suppose les Trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation $mx^2 + ny^2 = C$, on trouve facilement $y^m = cx^n$.

Quelquefois, par certains artifices, on peut ramener à être Homogène une Equation qui n'el' était pas primitivement.
Le cas se présente par exemple lorsque les Coefficients de dx et de dy sont du premier degré. - soit

$$(mx + ny + p) dx + (m'x + n'y + p') dy = 0$$

J' change de variable, et je pose

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} dx = dx' \\ dy = dy' \end{cases}$$

et je dispose de α et de β de manière à annuler la partie indépendante de x' et de y' , afin de rentrer dans le cas des Equations Homogènes. Pour cela, il faut poser

$$\begin{cases} m\alpha + n\beta + p = 0 \\ m'\alpha + n'\beta + p' = 0 \end{cases}$$

ou deux Equations seront possibles, et la transformation sera faite, les fois qu'on n'aura pas

$$mn' - m'n = 0$$

quand cela arrivera, on en tirera

$$n' = \frac{m'n}{m}$$

Reportant cette valeur dans l'Equation primitive, elle devient

$$(mx + ny + p) dx + \frac{m'}{m} (mx + ny) dy + p' dy = 0$$

$$(mx + ny) \left(dx + \frac{m'}{m} dy \right) + p dx + p' dy = 0$$

Si maintenant je pose

$$mx + ny = z$$

Donc

$$dy = \frac{dz - m dx}{n}$$

et si je reporte dans l'Equation, j'aurai

$$z \left(dx + \frac{m'}{m} \cdot \frac{dz - m dx}{n} \right) + p dx + p' \frac{dz - m dx}{n} = 0$$

ou se mettra ici que par sa différentielle, l'Eq. est de la forme

$$dx + q(z)dz = 0$$

Les variables sont séparées.

Cette substitution de $\frac{m'}{m}n$ à la place de n' rendrait inutile si m était nul. Mais, comme $mn' = m'n$, si $m=0$, on aura $m'=0$ ou $n=0$. - Supposons d'abord $n=0$. Il reste

$$pdx + (m'x + n'y + p')dy = 0$$

et, en posant comme tout-à-l'heure $m'x + n'y = z$, on arrivera de même à séparer les variables. - Si au contraire $m'=0$ en même temps que $m=0$, alors il n'y a plus d' x dans l'équation, partant, plus de difficulté.

Enfin, si les valeurs de α et de β se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, on prendrait une valeur quelconque: il n'y a pas de difficulté.

Remarque. - Cette équation

$$(mx + ny + p)dx + (m'x + n'y + p')dy = 0$$

peut encore être intégrée par une autre méthode. - Posons

$$mx + ny + p = z$$

$$m'x + n'y + p' = t$$

L'équation devient

$$zdx + tdy = 0$$

où l'on remplace dx et dy par leurs valeurs. Or ces valeurs ne contiennent que dx et dt . Nous arriverons donc ainsi à une équation homogène que nous luttons par conséquent intégrer.

3°. Équation Linéaire.

L'équation Linéaire du 1^{er} ordre est de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

P et Q étant des fonctions quelconques de la seule variable x .
on sait toujours intégrer une pareille équation.

Alors, supposons $Q = 0$. alors, l'équation se réduit à

$$\frac{dy}{dx} + P y = 0$$

On l'intègre successivement

$$\frac{dy}{y} = -P dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P dx + C$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P dx}$$

Revenons maintenant au cas général, et cherchons à le ramener au précédent. Pour cela, posons y un produit de deux fonctions indéterminées de x . Posons

$$y = uv$$

Donc

$$dy = u dv + v du$$

Remplaçant, il vient

$$\frac{u dv}{dx} + \frac{v du}{dx} + P uv = Q$$

J. puis maintenant poset

$$\left\{ \begin{array}{l} Q - v \frac{du}{dx} = 0 \quad (2) \\ \frac{dv}{dx} + P v = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) est donc ramener au système des équations (2) et (3). Or l'éq. (3) peut être intégrée, et donne

$$v = C e^{-\int P dx}$$

Revenant dans l'équation (2) il vient

$$Q - C e^{-\int P dx} \frac{du}{dx} = 0$$

Donc

$$u = \frac{1}{c} \int e^{\int P dx} Q dx + c'$$

or $y = uv$: Donc enfin nous aurons

$$y = ce^{-\int P dx} \left\{ \frac{1}{c} \int e^{\int P dx} Q dx + c' \right\}$$

ou bien

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ \int e^{\int P dx} Q dx + c \right\}$$

car $\frac{c'}{c}$ se réduit à une seule constante arbitraire.

2°. Equation de Bernoulli.

Elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q y^n$$

En divisant par y^n , on a

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{1-n} = Q$$

Remarquons que $y^{-n} \frac{dy}{dx}$ est, à un facteur près, la dérivée de y^{1-n} : car $\frac{d \cdot y^{1-n}}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}$. - L'équation donnée peut donc s'écrire ainsi :

$$\frac{d \cdot y^{1-n}}{dx} + (1-n) P y^{1-n} = (1-n) Q$$

Elle est donc ramenée au cas précédent, et elle donnera

$$y^{1-n} = e^{(n-1) \int P dx} \left\{ c - (n-1) \int e^{-(n-1) \int P dx} Q dx \right\}$$

ou bien

$$y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{e^{\int P du} \left\{ C - (n-1) \int e^{-\int P du} Q du \right\}}}$$

5°. Equation d'Euler.

C'est celle-ci :

$$\frac{dy}{du} + Py = Qy^2 + R$$

on peut encore interpréter, pourvu qu'on connaisse à priori une solution particulière de l'équation. — Soit $y = X$ cette solution, de façon que l'on ait

$$\frac{dX}{du} + PX = QX^2 + R$$

Pour

$$y = X + z$$

et substituons dans l'équation primitive ; elle deviendra

$$\frac{dX}{du} + \frac{dz}{du} + PX + Pz = QX^2 + 2QzX + Qz^2 + R$$

et en réduisant,

$$\frac{dz}{du} + (P - 2QX)z = Qz^2$$

et l'on est ainsi ramené à un cas particulier de l'équation d. Bernoulli : de sorte que la valeur de y sera

$$y = X - \frac{1}{e^{\int (P-2QX) du} \left\{ C - \int e^{-\int (P-2QX) du} Q du \right\}}$$

Comme exemples d'équations d'Euler, on peut prendre les suivantes

$$\frac{dy}{dx} + y + y^2 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + 2(P - 2Q)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} + x^3 - 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2xy^2 + \frac{3}{2}x - x^5$$

Dont les solutions particulières sont

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = 2$$

$$y = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{2}$$

6°. Intégration par la
Méthode du Facteur.

Reprenons l'équation

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0$$

son 1^{er} membre n'est pas en général une différentielle exacte : mais on peut toujours s'y ramener en la multipliant par un certain facteur, dont il s'agit de prouver l'existence et de trouver la valeur.

Supposons que $u = c$ soit l'intégrale générale, u étant fonction de x et de y . Différenciant, nous aurons

$$(2) \quad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0$$

Cette équation devra donner pour $\frac{dy}{dx}$ la même valeur que l'équation (1). Donc on aura identiquement

$$\frac{M}{N} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$$

et c'est bien la même identité; car autrement, cela se réduirait à $\sqrt[3]{(x,y)} = 0$, d'où résulterait une relation déterminée entre x et y , ce qui est absurde, puisque $u = c$ est l'intégrale. On aura donc

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{M} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{N} = 2$$

$$\frac{du}{dx} = M \cdot 2$$

$$\frac{du}{dy} = N \cdot 2$$

Donc

$$du = 2(Mdx + Ndy) = 0$$

Donc en multipliant par 2 le 1^{er} membre de l'équation (1), on obtient une différentielle exacte, c.q.f.d.

Il suit de là que l'éq. (1) possède d'ordre

$$\frac{du}{2} = 0$$

1^{er} ordre. Donc qu'il y a deux manières d'y satisfaire, soit en posant $du = 0$, d'où $u = c$, qui est l'intégrale générale, soit en posant $\frac{1}{2} = 0$, solution qui, ou bien sera comprise dans l'autre qui la donnera pour une certaine valeur particulière de la constante, ou bien n'y sera pas renfermée, et formera une solution particulière, indépendante de l'autre. Dans ce dernier cas, l'éq. $\frac{1}{2} = 0$ est dite solution singulière, dans l'autre, c'est une intégrale particulière.

Maintenant, comment pourra-t-on déterminer ce facteur Z ?
on sait que

$$Z(Mdx + Ndy)$$

est une Différentielle exacte. donc on doit avoir

$$\frac{d \cdot ZM}{dy} = \frac{d \cdot ZN}{dx}$$

ou

$$M \frac{dZ}{dy} + Z \frac{dM}{dy} = N \frac{dZ}{dx} + Z \frac{dN}{dx}$$

on enfin

$$(1) \quad M \frac{dZ}{dy} - N \frac{dZ}{dx} + Z \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = 0$$

Cette équation ne peut être intégrée par les méthodes générales
connues : son intégration est regardée comme d'un ordre de
difficulté plus élevé que celle de la proposée, à laquelle d'ailleurs
on ramène les équations de cette forme. on ne peut le
faire que dans des cas particuliers.

Supposons par exemple que Z soit indépendant de y . alors
 $\frac{dZ}{dy} = 0$. l'eq. (1) devient

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx$$

et remarquons en effet qu'à cet égard de $\frac{dZ}{dx} = H$, on peut
écrire $dx = Hdx$; car, Z étant indépendant de y , il ne
contient plus que la seule variable x . donc dZ peut et doit
être regardé comme étant, dans $\frac{dZ}{dx}$, la Différentielle totale
de Z . — En représentant par X le 2^d. membre, qu'on
peut former, et qui doit être indépendant de y (condition auquel
on reconnaît d'ailleurs la vérité de notre hypothèse), on aura

$$Z = e^{\int X dx}$$

Il en serait absolument de même si Z pouvait être indé-
pendant de x .

Cette hypothèse se vérifie dans le cas de l'eq. linéaire, qui

est

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

et dans laquelle

$$N = 1$$

$$M = Py - Q$$

alors

$$\frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx = P dx$$

Donc

$$Z = e^{\int P dx}$$

et en effet, le 1^{er} membre, qui devient

$$e^{\int P dx} \frac{dy}{dx} + P e^{\int P dx} y dx = e^{\int P dx} Q dx$$

est alors une différentielle exacte. Car

$$e^{\int P dx} Q dx = d. \int e^{\int P dx} Q dx$$

et

$$e^{\int P dx} \frac{dy}{dx} + P e^{\int P dx} y dx = d. y e^{\int P dx}$$

Donc l'intégrale de l'équation linéaire est

$$y e^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Q dx = c$$

On trouve aussi comme

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ \int e^{\int P dx} Q dx + C \right\}$$

L'équation générale qui donne Z peut s'écrire autrement.
Car l'équation primitive peut se mettre sous la forme

$$dy + M dx = 0$$

et alors l'eq. en Z devient

$$M \frac{dx}{dy} - \frac{dZ}{dx} + Z \frac{dM}{dy} = 0$$

M étant donné le rapport des deux coefficients de dx et de dy . - Cette forme montre plus facilement que il existe
qu'il n'y a que les équations linéaires pour lesquelles Z
peut être indépendant de y . - admettons en effet que

Z ne contient que x . alors il reste pour l'équation ci-dessus :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dM}{dy} dy$$

$\frac{dM}{dy}$ doit être fonction de x seul. Je l'appellerai par P . alors

$$\frac{dM}{dy} = P$$

$$M = \int P dy + C = P y + Q$$

Q étant également fonction de x seul : et alors l'équation $dy + M dx = 0$ devient

$$\frac{dy}{dx} + P y + Q = 0$$

ce qui démontre bien l'énoncé.

Ce facteur Z , nous l'avons vu reste mis en évidence dans les autres méthodes d'intégration que nous avons employées. ainsi, quand on considère l'équation

$$X y dx + X, y, dy = 0$$

on divise par X, y : et introduit le facteur $\frac{1}{X, y}$.

Dans la théorie des équations homogènes, nous avons vu (en partant toujours de l'éq. $M dx + N dy = 0$)

$$M = x^m Z$$

$$N = x^m Z,$$

Z et $Z,$ étant des fonctions de $z = \frac{y}{x}$: et alors, en divisant par x^m , l'équation devient

$$Z dx + Z, dy = 0$$

$$Z dx + Z, (z dx + x dz) = 0$$

ou bien

$$(Z + Z, z) dx + Z, x dz = 0$$

Divisant par $x (Z + Z, z)$

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z,}{Z + Z, z} dz = 0$$

Donc le facteur introduit est ici

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x(z+z, z)}$$

ou bien

$$\frac{1}{x^{m+1}} \cdot \frac{1}{z+z, z}$$

ou enfin

$$\frac{1}{Mx + Ny}$$

Donc, M et N étant des fonctions homogènes du même degré, l'expression

$$\frac{M dx + N dy}{Mx + Ny}$$

est toujours une différentielle exacte.

Cette propriété peut d'ailleurs être trouvée autrement. Posons en effet

$$\frac{M}{Mx + Ny} = M'$$

$$\frac{N}{Mx + Ny} = N'$$

et montrons que $M' dx + N' dy$ est une différentielle exacte, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dM'}{dy} = \frac{dN'}{dx}$$

or

$$\frac{dM'}{dy} = \frac{\frac{dM}{dy}(Mx + Ny) - M\left(x \frac{dM}{dy} + N + y \frac{dN}{dy}\right)}{D^2} = \frac{Ny \frac{dM}{dy} - MN - My \frac{dN}{dy}}{D^2}$$

$$\frac{dN'}{dx} = \frac{\frac{dN}{dx}(Mx + Ny) - N\left(x \frac{dM}{dx} + M + y \frac{dN}{dx}\right)}{D^2} = \frac{Mx \frac{dN}{dx} - MN - Nx \frac{dM}{dx}}{D^2}$$

reste à vérifier que

$$Ny \frac{dM}{dy} - My \frac{dN}{dy} = Mx \frac{dN}{dx} - Nx \frac{dM}{dx}$$

ou

$$N\left(y \frac{dM}{dy} + x \frac{dM}{dx}\right) = M\left(x \frac{dN}{dx} + y \frac{dN}{dy}\right)$$

ou, à cause d'une propriété connue des fonctions homogènes,

$$N(m, M) = M(m, N)$$

ce qui est vrai, donc la proposition est démontrée.

Mais nous ne nous arrêtons pas à dire, si

$$V = f(u, y, z)$$

on a

$$mV = u \frac{df}{du} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz}$$

grand l'équation est homogène. - on peut facilement le démontrer. Car, posons

$$\frac{y}{u} = t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} dy = t du + u dt \\ dz = u dt + u du \end{array} \right. \end{array} \right.$$

l'équation $V = f(u, y, z)$ devient

$$V = u^m \varphi(u, t)$$

donc

$$dV = m u^{m-1} \varphi(u, t) du + u^m \left\{ \frac{d\varphi}{dt} dt + \frac{d\varphi}{du} du \right\}$$

Mais on a aussi

$$dV = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dy} \{ t du + u dt \} + \frac{df}{dz} \{ u du + u dt \}$$

$$dV = du \left\{ \frac{df}{du} + t \frac{df}{dy} + u \frac{df}{dz} \right\} + dt \{ u \frac{df}{dy} + u \frac{df}{dz} \} + etc. = \frac{du}{u} \left\{ u \frac{df}{du} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} \right\} + etc.$$

Les deux valeurs de dV devant être identiques, on aura

$$\frac{1}{u} \left\{ u \frac{df}{du} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} \right\} = m u^{m-1} \varphi(u, t)$$

$$u \frac{df}{du} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} = m f(u, y, z)$$

c q f d.

Revenons à l'intégration par le facteur. - Si question a un facteur Z , on démontrera facilement qu'il y en a une infinité. Car l'équation

$$du = Z (M dx + N dy)$$

prend la forme

$$\varphi(u) du = (M dx + N dy) \varphi(u) Z$$

$\varphi(u) du$ est une différentielle exacte, donc aussi le

second membre.

Réciproquement, tout facteur propre à rendre le 1^{er} membre une différentielle exacte est toujours dans la forme $\lambda q(u)$.

Supposons en effet que, d'une manière quelconque, on en ait trouvé un autre v , de façon qu'il ait

$$v (M dx + N dy) = d \cdot U$$

Si on que $v = \lambda q(u)$. En effet, les deux égalités

$$\lambda (M dx + N dy) = du$$

$$v (M dx + N dy) = dU$$

on tire

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{dU}{du}$$

$$dU = \frac{v}{\lambda} du$$

or, $u = c$ étant une Intégrale de la proposée, il s'ensuit que du est toujours nul. D'ailleurs, on voit que dU l'est en même temps. Donc U est constant en même temps que u . Donc U est fonction de u . Donc il s'ensuit

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{dU}{du}$$

Donc

$$\frac{v}{\lambda} = q(u)$$

$$v = \lambda q(u) \quad \text{c. q. f. d.}$$

Tous les facteurs étant de la forme $\lambda q(u)$, il suit de là que si, par des moyens quelconques, on en a pu trouver deux, v et λ , l'équation

$$\frac{v}{\lambda} = c$$

sera l'intégrale générale: car $\frac{v}{\lambda}$ sera une certaine fonction $\pi(u)$, et poser $\pi(u) = c$ ou $u = c$, c'est absolument la même chose.

Reprenons maintenant les équations homogènes, et soit

$$Mdx + Ndy = 0$$

une particulière équation. on a vu qu'un facteur propre à rendre le 1^{er} membre une différentielle exacte est

$$Z = \frac{1}{Mx + Ny}$$

Supposons maintenant, ce qui peut quelquefois arriver, que $Mdx + Ndy$ soit aussi une différentielle exacte, auquel cas on aurait un second facteur $V = 1$. L'intégrale générale sera alors $\frac{V}{Z} = C$, c.à.d.

$$Mx + Ny = C$$

Si par exemple on a $x dy + y dx = 0$, $V = 1$, $Z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, et l'intégrale est $x^2 + y^2 = C$.

Ce facteur $Z = \frac{1}{Mx + Ny}$ ne peut être introduit si $Mx + Ny = 0$. Mais, si cela arrive, $\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$; alors l'équation primitive devient $x dy - y dx = 0$ et l'intégrale générale est $y = cx$.

En résumé, on voit que la méthode du facteur est plus curieuse qu'utile, et ne nous a guères appris quelque chose de nouveau.

Equations Différentielles

D'un Degré quelconque en $\frac{dy}{dx}$.

Soit

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

une pareille Equation. D'où peut-elle provenir?

Remarquons que si l'on a une Equation

$$(1) \quad f(x, y, c) = 0$$

où c entre à la puissance n , on a, en la différentiant,
l'Eq. Différentielle Immédiate

$$(2) \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$$

l'Equation qui contient aussi c , et si l'on élimine c entre
(1) et (2), on aura l'Equation Différentielle proprement dite.Je dis que cette Eq. contiendra $\frac{dy}{dx}$ à la puissance n .

Car l'Eq. (1) peut se mettre sous la forme

$$(3) \quad (c - f_1)(c - f_2) \dots (c - f_n) = 0$$

et l'Eq. (2)

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = q(x, y, c)$$

Si, de l'Eq. (3) on tire les n valeurs de c pour les
quelles successivement dans l'Eq. (4), on aura autant de
valeurs correspondantes pour $\frac{dy}{dx}$, à savoir

$$\text{pour } c = f_1, \quad \frac{dy}{dx} = q_1$$

$$c = f_2, \quad \frac{dy}{dx} = q_2$$

$$c = f_n, \quad \frac{dy}{dx} = q_n$$

$\frac{dy}{dx}$ aura donc en général n valeurs: l'équation finale en $\frac{dy}{dx}$ sera généralement du 2nd degré n , et elle sera

$$\left(\frac{dy}{dx} - q_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - q_2\right) \dots \left(\frac{dy}{dx} - q_n\right) = 0$$

Réciproquement, si l'on donne une eq.

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

en $\frac{dy}{dx}$ entre à la n^e puissance, il est évident que C devra entrer à une certaine puissance, supérieure à la 1^{re}, dans l'intégrale

$$F(x, y, C) = 0$$

actuellement, comment peut-on intégrer une pareille équation? En général, cela est impossible; on ne peut le faire que dans quelques cas particuliers, que nous allons passer en revue.

Premier cas.

Il peut arriver, mais cela se présente très rarement, qu'en résolvant l'équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on arrive à une expression directement intégrable.

En voici un exemple. — on donne une infinité de Paraboles

$$(1) \quad y^2 = 2px + p^2$$

ayant même foyer et même axe (l'origine est un foyer), et l'on demande les courbes qui les coupent à angle droit.

L'équation différentielle de ces courbes sera évidemment

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{p}{y} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{p}$$

$$(2) \quad p = -y \frac{dx}{dy}$$

Éliminant p entre les eq. (1) et (2), on aura l'eq. différentielle de

problème :

9.10

$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

ou

$$y dy + x dx = \pm dx \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\pm \frac{y dy + x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx$$

ou bien, en intégrant,

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + c$$

$$y^2 = c^2 + 2cx$$

Equation de même forme que la proposée : elle représente aussi une infinité de paraboles ayant leur foyer à l'origine. Surtout, la constante doit être choisie en tant positif, afin qu'il y ait intersection. De façon que, si l'on prend $c > 0$, il faudra prendre $c < 0$, et inversement.

2^e. Cas :

Supposons que $\frac{dy}{dx}$ entre dans l'éq. donnée,

$$f \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$$

Supposons encore que nous prenions la dérivée : nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = a'$$

$$\frac{dy}{dx} = a''$$

!

et, en intégrant séparément

$$y - ax - c = 0$$

$$y - a'x - c = 0$$

$$y - a''x - c = 0$$

!

en mettant partout la même constante, ce qui n'altère en rien la généralité des résultats. - l'intégrale générale

une ligne

$$(y - a'x - c)(y - a''x - c) \dots = 0$$

on écrit

$$\left(\frac{y-c}{x} - a'\right)\left(\frac{y-c}{x} - a''\right) \dots = 0$$

Ce qui montre que, pour obtenir cette équation, il suffit de remplacer, dans la proposée, $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y-c}{x}$.

3°. Cas.

on peut examiner le cas où $\frac{dy}{dx}$ entre dans l'Eq. avec une seule des variables. Soit

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

si l'on peut résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on aura une ou plusieurs valeurs de la forme $dy = q(x)dx$, et le problème sera ramené à une ou plusieurs quadratures.

Si l'on ne peut pas résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, mais qu'on puisse le faire par rapport à x , on aura

$$(1) \quad x = F'(p)$$

en posant

$$(2) \quad dy = p dx$$

différenciant l'Eq. (1), on aura

$$dx = F''(p) dp$$

l'Eq. (2) devient alors

$$dy = p F''(p) dp$$

donc

$$(3) \quad y = \int p F''(p) dp + c$$

et si maintenant on peut éliminer p entre l'Eq. (2) et la proposée, le problème sera résolu.

L'eq. (3) peut se présenter sous une autre forme. - Par l'eq. (2) donne

$$y = \int p dx + C = px - \int x dp + C$$

et, en substituant,

$$(3) \quad y = px - \int F(p) dp + C$$

Pour l'équation ne contenant que y et $\frac{dy}{dx}$, ce trait absolument la même chose.

Voici un exemple qui rentre dans ce cas.

on demande la courbe telles que, en étant un point quelconque, m C la Normale, m P l'eq. Donné; prenant sur l'ordonnée m B = a, et menant B C parallèle à OX; on ait O B + B C = m C.

L'équation différentielle se trouve immédiatement, c'est

$$x + a \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

ou

$$(1) \quad x + ap = a\sqrt{1+p^2}$$

on peut résoudre par rapport à p : car, en élevant au carré, on a

$$x^2 + a^2 p^2 + 2apx = a^2 + a^2 p^2$$

$$p = \frac{a^2 - x^2}{2ax}$$

on a donc, pour l'intégrale cherchée

$$y = \int \frac{a^2 - x^2}{2ax} dx + C = \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2a} \int x dx + C = \frac{a}{2} \ln x - \frac{x^2}{4a} + C = \frac{1}{4a} (2a^2 \ln x - x^2 + C)$$

$$(2) \quad x^2 + 4ay = 2a^2 \ln x + C$$

c'est l'eq. générale cherchée.

on bien de résoudre l'eq. (1) par rapport à p , on peut la résoudre par rapport à x . on a alors

$$x = -ap + a\sqrt{1+p^2}$$

$$dx = -a dp + \frac{ap dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

et $y = \int p dx$: donc

$$y = -a \int p dp + a \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} + C = -a \frac{p^2}{2} + a \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} + C$$

Maintenant, on a

$$(2) \quad \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \left\{ \frac{p^2 dp + dp - dp}{\sqrt{1+p^2}} \right\} = \int dp \sqrt{1+p^2} - \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

or

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \mathcal{L}(p + \sqrt{1+p^2}) \quad \text{et} \quad \int dp \sqrt{1+p^2} = p \sqrt{1+p^2} - \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

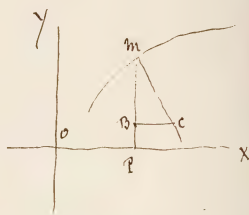
Substituant ces valeurs dans l'eq. (2), on a

$$\int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} - \frac{1}{2} \mathcal{L}(p + \sqrt{1+p^2}) + C$$

Reportant dans la valeur de y

$$y = \frac{a}{2} (-ap + a\sqrt{1+p^2}) - \frac{a}{2} \mathcal{L}(p + \sqrt{1+p^2}) + C$$

et, à cause de la valeur de x ,



$$y = \frac{px}{2} - \frac{a}{2} \int (p + \sqrt{1+p^2}) + C$$

reste à éliminer p entre cette Eq. et la proposée. Or, celle-ci donne $p = \frac{a^2 - x^2}{2ax}$. Donc

$$y = \frac{a^2 - x^2}{4a} - \frac{a}{2} \int \left\{ \frac{a^2 - x^2 + \sqrt{a^4 x^4 + a^4 x^4 - 2a^4 x^4}}{2ax} \right\} + C = \frac{a^2 - x^2}{4a} - \frac{a}{2} \int \frac{a}{x} + C$$

$$4ay + x^2 = a^2 - 2a^2 \int \frac{a}{x} + C = a^2 - 2a^2 \int \frac{1}{x} + C = a^2 - 2a^2 \log x + C = 2a^2 \log x + C'$$

c'est-à-dire la même Eq. qu'on avait obtenue antérieurement.

6^e. Cas.

Une ou variables n'entrent qu'au 1^{er} degré. — on a par exemple :

$$y = f(x, p)$$

on posant

$$dy = p dx$$

Différentions :

$$dy \text{ ou } p dx = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dp} dp$$

$$\left(p - \frac{df}{dx}\right) dx - \frac{df}{dp} dp = 0$$

Equation qui est de la forme $Mdx + Ndy = 0$, et il pourra arriver que l'on sache l'intégrer. on l'intégrera. Donc, et l'on éliminera p entre l'intégrale et l'Eq. primitive.

7^e. Cas.

Les deux variables peuvent entrer au 1^{er} degré. Supposons alors

$$y = Mx + N$$

M et N ne contenant que $\frac{dy}{dx}$. on posera encore $dy = p dx$. on

Différentiera :

$$p dx = M dx + x \frac{dM}{dp} dp + \frac{dN}{dp} dp$$

$$(p - M) dx - \left(x \frac{dM}{dp} + \frac{dN}{dp}\right) dp = 0$$

Equation qui est toujours de la forme $Mdx + Ndy = 0$; mais de plus, elle est linéaire, car elle peut s'écrire

$$\frac{dp}{dp} - \frac{\frac{dM}{dp}}{p - M} x - \frac{\frac{dN}{dp}}{p - M} = 0$$

on pourra donc toujours l'intégrer, et l'on n'aura plus qu'à éliminer p .

Dans ce cas, l'équation peut avoir la forme particulière

$$y = px + f(p)$$

alors on aura

$$dy \text{ ou } p dx = p dx + x dp + f'(p) dp$$

$$dp \{ x + f'(p) \} = 0$$

Et y a donc deux solutions: D'abord

$$dp = 0$$

$$p = c$$

Reportant dans l'éq. primitive, on voit que l'intégrale générale

$$y = cx + f(c)$$

s'obtient ici par une simple substitution: Elle représente une infinité de droites.

au lieu d'après comme il vient d'être fait, on est par là conduit

à se dire: $p = c$, et $\frac{dy}{dx} = c$, et $dy = c dx$: on peut donc

intégrer, et l'on aura $y = cx + c'$. La présence de deux constantes

annonce la fausseté du raisonnement. Elle tient à ce que nous avons

différencié une équation en p : nous avons ainsi formé une eq.

différentielle du 2^e ordre, et c'est elle que nous interprétons en inté-

grant ainsi: tel n'est pas notre but.

à présent, on peut encore poser:

$$(2) \quad x + f'(p) = 0$$

et, par l'élimination de p , j'aurai une solution de l'éq. proposée.

Si (ce qui serait assez singulier) on avait du doute sur la

réalité de ce résultat, on pourrait s'en convaincre de la manière

suivante: Prenons deux équations

$$\begin{cases} x + f'(z) = 0 \\ y = zx + f(z) \end{cases}$$

z étant quelconque, et éliminons z . Pour cela, différencions

la seconde :

$$\frac{dy}{dx} = z + \{x + f'(x)\} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = z$$

replaçons dans la seconde équation; il vient

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

c'est l'équation proposée, qui est donc bien réellement satisfaite pour le système précédent.

L'équation finale provenant de ce système

$$\begin{cases} x + f'(p) = 0 \\ y = px + f(p) \end{cases}$$

ne contient pas de constante. En général, elle ne peut se dériver de l'intégrale générale. Car l'équation $x + f'(p) = 0$ donne $p = \chi(x)$. D'où que l'équation finale est $y = x\chi(x) + f(\chi(x))$ équation qu'on ne peut, en particulierisant la constante, dériver de l'intégrale générale $y = cx + f(c)$. alors, on a une solution singulière. — P. cependant $\chi(x) = a$, on n'a plus qu'une intégrale particulière. Il en est de même si $f'(p) = a$. Car alors l'éq. $x + f'(p) = 0$ devient $x + a = 0$, elle est elle-même l'éq. finale; mais elle prouve que $f'(p) = ap + b$; donc $f(c) = ac + b$; donc l'intégrale générale est $y = cx + ac + b$, ou $\frac{y}{c} = x + a + \frac{b}{c}$, et si $c = \infty$, il reste $x + a = 0$; ce n'est donc là qu'une intégrale particulière, en ce sens qu'elle se déduit de l'intégrale générale quand on donne à la constante une valeur infinie.

on peut remarquer que la solution qui nous occupe s'obtient en éliminant p entre les équations $x + f'(p) = 0$, $y = px + f(p)$;

c'est la même chose que d'éliminer c entre $y = cx + f(c)$ et $x + f'(c) = 0$, dérivée de la première par rapport à c . Donc cette solution représente l'enveloppe des courbes données par l'intégrale générale.

Exemple. - Quelles sont les courbes telles que les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes ont une longueur constante a ?

L'éq. de la tangente au point x, y étant $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, l'éq. différentielle du problème sera

$$a = \frac{-y + x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$y dx - x dy = -a \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$y = x \frac{dy}{dx} - a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

L'intégrale générale sera donc

$$y = cx - a \sqrt{1 + c^2}$$

elle représente une suite de droites. - Pour avoir l'intégrale singulière, éliminons c entre les deux équations

$$y = cx - a \sqrt{1 + c^2} \quad x - \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} = 0$$

La seconde donne $x^2 + c^2 x^2 = a^2 c^2$, $c^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$. Reportant dans la 1^{re}, il vient

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y^2(a^2 - x^2) = (x^2 - a^2)^2 = (a^2 - x^2)^2$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

c'est l'éq. du cercle qui a l'origine pour centre et a pour rayon. (C'est la solution singulière du problème. - Quant à l'intégrale générale, elle représente toutes les tangentes à ce cercle : car on voit que $y = mx \pm R\sqrt{m^2 + 1}$ est l'équation de la tangente dont le coefficient angulaire est m .

Sur les Solutions Singulières.

Quelques observations générales sur ces solutions viennent se placer ici tout naturellement.

On voit que ces solutions, celles qui même qui sont des solutions singulières proprement dites, ne peuvent se dériver de

l'intégrale générale pour une valeur particulière donnée à la constante. — Toutefois, nous allons voir qu'il est possible de les dériver de cette Intégrale Générale, d'une autre manière.

Supposons une Eq. Différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Soit

$$(2) \quad F(x, y, c) = 0$$

l'Intégrale Générale, et

$$(3) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$$

l'Eq. Différentielle immédiate, &c. faisons qu'en éliminant c entre les Eq. (2) et (3), on retrouve identiquement l'Eq. proposée (1).

Si dans l'Eq. (2), je remplace c par une fonction arbitraire q de x et y , l'Eq. résultante

$$(4) \quad F(x, y, q) = 0$$

sera propre à représenter toute espèce de relation déterminée entre x et y . Donc cette équation comprend l'intégrale générale et les solutions singulières de la proposée. — Seulement, il faut disposer de q de manière que l'Eq. (4) satisfasse réellement à l'Eq. (1). — Je différentie l'Eq. (4). Il vient

$$(5) \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dq} \left(\frac{dq}{dx} \right) = 0$$

$\frac{dq}{dx}$ étant la dérivée totale de q par rapport à x . — Les équations (3) et (5) me donnent

$$\text{l'Eq. (3)} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{dF}{dx} \right)}{\left(\frac{dF}{dy} \right)}$$

$$\text{l'Eq. (5)} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{dF}{dx} \right)}{\left(\frac{dF}{dy} \right)} - \frac{\frac{dF}{dq} \left(\frac{dq}{dx} \right)}{\left(\frac{dF}{dy} \right)}$$

Remarque que ces deux valeurs doivent être identiques. Or, si l'on pose p) l'éq. $F(x, y, q) = 0$ pour le reporter dans le rapport

$$\frac{\frac{dF(x, y, q)}{dx}}{\frac{dF(x, y, q)}{dy}} \quad \text{et si l'on pose c) de } F(x, y, c) = 0 \text{ pour le porter dans } \frac{\frac{dF(x, y, c)}{dx}}{\frac{dF(x, y, c)}{dy}}$$

ce sont deux expressions qui donneront absolument le même résultat.

Or ailleurs la 1^{re} valeur de $\frac{dy}{dx}$ se réduit, par hypothèse, à $f(x, y)$

Ainsi, pour que la valeur de q tirée de l'éq. (d) soit convenable, il faut et il suffit qu'elle rende nul le terme $\frac{1}{dF} \times \frac{dF}{dq} \left(\frac{dq}{dx} \right)$. Ainsi, pour avoir toutes les intégrales de l'éq. différentielle proposée, il suffit d'éliminer q entre les deux équations

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dq} \left(\frac{dq}{dx} \right) = 0 \\ F(x, y, q) = 0 \end{cases}$$

Le système de ces deux équations se décompose en deux autres, savoir:

$$(B) \quad \begin{cases} F(x, y, q) = 0 \\ \frac{\frac{dF}{dq}}{\frac{dF}{dy}} = 0 \end{cases} \quad (C) \quad \begin{cases} F(x, y, q) = 0 \\ \left(\frac{dq}{dx} \right) = 0 \end{cases}$$

Or, dans le système (C), l'éq. $\left(\frac{dq}{dx} \right) = 0$ donne $q = \text{const.}$ donc l'équation finale est

$$F(x, y, c) = 0$$

on retombe ainsi sur l'intégrale générale. — Reste le système

(D), qui se décompose lui-même en deux autres

$$(D) \quad \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{dF}{dc} = 0 \end{cases} \quad (E) \quad \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{1}{\frac{dF}{dy}} = 0 \end{cases}$$

en échangeant x en c , ce qui ne fait rien ; et il reste à éliminer c dans chacun de ces Systèmes.

Remarquons ici que, quelque forme qu'on donne à l'équation $F(x, y, c) = 0$, le résultat est le même. — On peut arriver qu'on mise la mettre sous la forme $y - \pi(x, c) = 0$, auquel cas $\frac{dF}{dy} = 1$; et alors le système (E) ne donne plus rien. — Si au contraire l'interpolaire est mise sous cette forme $c - \psi(x, y) = 0$, c'est le Système (D) qui est indéterminable. alors, toutes les solutions singulières sont fournies par le système (E) qui devient

$$\begin{cases} c - \psi(x, y) = 0 \\ \frac{1}{\frac{d\psi}{dy}} = 0 \end{cases}$$

et alors, c'est la dernière équation qui est elle-même la solution singulière. — En fait, cela n'est pas nouveau ; on a vu que, si l'on a une équation dont $u = c$ est l'intégrale générale, si \bar{z} est un facteur propre à rendre le 1^{er} membre une différentielle exacte, l'eq. peut s'écrire $\frac{du}{\bar{z}} = 0$; par suite, qu'il y a deux manières d'y satisfaire : soit en posant $du = 0$, d'où $u = c$, soit en posant $\frac{1}{\bar{z}} = 0$. Maintenant, $M du + N dy = 0$ étant l'équation proposée, on a généralement $\bar{z} = \frac{1}{N} \cdot \frac{du}{dy}$. donc $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{N}{\frac{du}{dy}}$. or ici l'eq. est $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ $N = 1$, donc $\frac{1}{\bar{z}} = 0$ c'est $\frac{du}{dy} = 0$.

Passons maintenant de côté le système (E) que nous pourrions, au moins éloignement, supposer impossible, et revenons au système (D). — la forme des deux équations qui le composent montre que la solution singulière est l'enveloppe des courbes que représentent l'intégrale générale.

Il ne faudrait pas croire que toutes les solutions de ce

Système pouvant admettre Des Solutions Singulières. Tout ce que l'on peut affirmer, c'est que, s'il y a Des Solutions Singulières, elles sont comprises Dans celles-là. — Supposons par exemple que l'intégrale Générale soit

$$y = X + c(x-c)^2$$

La dérivée par rapport à c sera

$$0 = (x-c)(x-3c)$$

une Des valeurs de c est $c = x$: reportant, il vient $y = X$: ce n'est pas là une Solution Singulière, puisqu'on l'obtient en faisant $c = 0$ Dans l'intégrale Générale. Mais la valeur $c = \frac{x}{3}$, donne $y = X + \frac{4x^3}{27}$, fournissant une Solution Singulière.

Comment donc pourra-t-on reconnaître si l'on a une Solution Singulière ou simplement une Intégrale particulière ?

Imaginons que l'élimination de c ait conduit au résultat $\Pi(x, y) = 0$. Est-ce une Solution Singulière ? Éliminons y entre cette Eq. et l'intégrale Générale. Nous aurons $\varphi(x, c) = 0$. Si de là on peut tirer une valeur constante pour c , $c = a$, $\Pi(x, y) = 0$ n'est qu'une Intégrale particulière. Si au contraire on n'a que Des valeurs de la forme $c = \chi(x)$, on a une vraie Solution Singulière.

Si l'intégrale est

$$M + cN = 0$$

l'application De la méthode Donne

$$N = 0$$

et c'est pas là une Solution Singulière, puisqu'on l'obtient en faisant c Infini Dans l'intégrale Générale. — Si $c = 0$, on a $M = 0$, c'est aussi une Intégrale particulière. — Il est évident qu'alors toutes les Courbes représentées par l'intégrale Générale passent par le point commun aux courbes $M = 0$, $N = 0$.

P. pour exemple on a

$$(y^2 + x^2 - a^2) + c(y - ba) = 0$$

tous les cercles que représente cette équation passant aux points A et A' on se coupe le cercle $y^2 + x^2 = a^2$ et la droite $y = ba$. Le lieu des centres de ces cercles est B ou B', perp. sur AA'. On voit bien ici que si le rayon augmente indéfiniment, la droite AA' devient la limite de ces cercles.

On voit très-bien qu'il y a des cas où il n'y a pas de solution singulière. P. pour exemple l'intégrale est de la forme

$$y = ax + c$$

elle représente une suite de parallèles qui n'ont pas d'enveloppe. De même si l'on a

$$x^2 + y^2 = c$$

$$y = x^2 - cx + c$$

etc.

Exemples.

on demande la courbe telle que la partie des tangentes interceptées entre les axes coordonnées est constamment égale à a .

l'eq. de la tangente est $y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$. Elle me donne, pour $x=0$, $y_0 = y - x \frac{dy}{dx}$ et, pour $y=0$, $x_0 = x - y \frac{dx}{dy}$. l'eq. différentielle est donc

$$\left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x - y \frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad \left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2$$

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

l'intégrale est donc

$$(1) \quad y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

elle représente une suite de droites, qui sont les tangentes elles-mêmes. La vraie solution du problème sera donnée par la solution singulière, c.à.d. l'enveloppe de ces droites. Différenciant l'eq. (1) par rapport à c , on a

$$0 = x + \frac{a\sqrt{1+c^2} - \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}}{1+c^2} \quad \text{ou} \quad (2) \quad x + \frac{a}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Autre à diminuer c entre les eq. (1) et (2). - or l'eq. (2) donne $(1+c^2)^{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$. l'eq. (1) se simplifie donc, et devient

$$y = cx - c a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$$

$$c = \frac{y}{x - a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}$$

Apportant cette valeur dans l'éq. (1), on a

$$x + \frac{a}{1 + \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}} = 0$$

On divise par successivement

$$x \left\{ 1 + \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} \right\} + a = 0, \quad x^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} \right\} = a^{\frac{1}{3}}, \quad x^{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})} - a^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$(x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}})^2 (x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}) = -\frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}}, \quad (x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}})^2 = -\frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{soit } x + y = a$$

Cette courbe est un cas particulier de la développée de l'écluse. Elle a à l'origine la forme à-crochet; $OA = OA' = OB = OB' = a$: les axes coordonnés et leurs deux bissectrices sont des axes de symétrie de la courbe.

Cette courbe peut être engendrée d'une manière continue par un point quelconque d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}a$ roulant intérieurement dans un cercle de rayon a . Il est facile de le démontrer. — Considérant un point m quelconque de cette épicycloïde, et joignant mK . L'arc $mH = BH$. Par ailleurs $OH = 2CH$. Donc angle $BOH = \frac{1}{2}mKH$. D'autre part, on a visiblement $mKH = mOK + OKM$. Or $OKM = MOK$. Donc $OK = KO = \frac{1}{2}a$. — MON étant d'ailleurs un triangle rectangle, puisque $OK = OK$, on a aussi $OK = KN = \frac{1}{2}a$. Donc MN est constamment égal à a . Donc la droite MN constante, en glissant sur les côtés de l'angle des axes, trace constamment pour un des points de l'épicycloïde: donc cette épicycloïde est bien le lieu des extrémités successives de la droite MN .

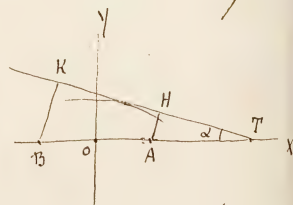
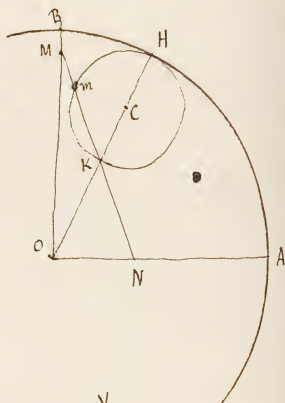
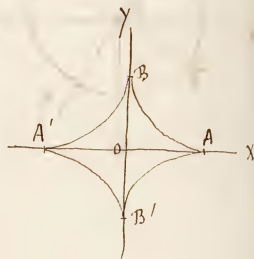
Autre exemple. — on demande une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes sur les tangentes soit constant.

Soit BHT une tangente, on doit avoir $AH \cdot BK = b^2$. — Désignons par c la distance $OA = OB$. on a $AH \cdot BK = AT \cdot BT \sin^2 \alpha$. or $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, donc $\frac{dy}{dx} = p$ et $\sin^2 \alpha = \frac{p^2}{1+p^2}$. — Maintenant, l'éq. de la tangente étant $y - y_0 = p(x - x_0)$, pour $y = 0$ on trouve $x_0 - a = -\frac{y}{p}$, x_0 ou $OT = a - \frac{y}{p}$, Par ailleurs, évidemment $AT \cdot BT = OT^2 - c^2$. Donc l'éq. du problème est

$$\left\{ \left(a - \frac{y}{p} \right)^2 - c^2 \right\} \frac{p^2}{1+p^2} = b^2$$

Si la tangente avait passé entre les deux points A et B , on aurait eu $AT \cdot BT = c^2 - OT^2$. De sorte que l'éq. du problème est, plus généralement

$$\frac{(y - px)^2 - p^2 c^2}{1 + p^2} = \pm b^2$$



D'où l'on tire

$$y = px + \sqrt{p^2(c^2 \pm b^2)} \pm b^2$$

Avec l'intégrale est, en désignant par K la constante,

$$(1) \quad y = Kx + \sqrt{K^2(c^2 \pm b^2)} \pm b^2$$

C'est la suite des courbes elles-mêmes. Cherchons la solution singulière... d'eq. (1)

$$(2) \quad 0 = x + \frac{K(c^2 \pm b^2)}{\sqrt{K^2(c^2 \pm b^2)} \pm b^2}$$

En posant $c^2 \pm b^2$, ces deux équations deviennent plus simplement

$$\begin{cases} y = Kx + \sqrt{a^2 K^2 \pm b^2} & (1) \\ x + \frac{a^2 K}{\sqrt{a^2 K^2 \pm b^2}} = 0 & (2) \end{cases}$$

On élimine K et la 2^e eq. donne

$$(1) \quad \sqrt{a^2 K^2 \pm b^2} = -\frac{a^2 K}{x}, \quad a^2 K^2 \pm b^2 x^2 = a^4 K^2, \quad K^2 = \frac{\pm b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}$$

Ainsi, si j'y reporte dans l'eq. (1) la valeur (2) du radical qui y entre, j'aurai

$$y = Kx - \frac{a^2 K}{x} \quad xy = Kx^2 - a^2 K \quad K^2 = \frac{x^2 y^2}{(x^2 - a^2)^2}$$

Égalant les deux valeurs de K^2 , j'aurai

$$\frac{\pm b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2} = \frac{x^2 y^2}{(x^2 - a^2)^2} \quad \frac{\pm b^2}{a^2} = \frac{y^2}{a^2 - x^2}$$

$$a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2$$

ce qui donne soit une ellipse, soit une hyperbole. Les courbes sont donc les seules qui jouissent de la propriété énoncée. on aura une hyperbole ou une ellipse suivant que la courbe passera ou non entre les deux points donnés A et B .

Equations Différentielles d'ordre Quelconque.

Commençons par quelques considérations générales que nous aurons à journales jusqu'ici.

Si l'on différentie n fois une Equation de la forme

$$y = f(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) \quad (1)$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, c_1, \dots, c_m) \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x, c_1, \dots, c_m) \quad (3)$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = f_{m-1}(x, c_1, \dots, c_m) \quad (m)$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f_m(x, c_1, c_2, \dots, c_m) \quad (m+1)$$

Maintenant, Des m premières Equations, on peut tirer les valeurs Des m constantes, et les porter dans la $(m+1)^{\text{e}}$. alors évidemment on aura un résultat tel que

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}})$$

C'est là une Equation Différentielle d'ordre m . On appelle Equation Différentielle d'ordre m , une Equation qui provient de l'élimination de m constantes dans une Equation donnée. — Toutefois, nous avons supposé que l'on pourrait résoudre les m premières Equations par rapport aux m constantes qui y entrent: cela revient à dire que ces Equations s'affaiblissent par

Il est incompatible, de telle sorte que si nous attribuons à x une valeur arbitraire a , nous pourrions prendre arbitrairement $y = b$, $\frac{dy}{dx} = b'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = b''$, ..., $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$, et obtenir des valeurs finies pour les constantes c_1, c_2, \dots, c_m . Quelles que soient les fois qu'il en est ainsi, l'élimination des constantes conduit nécessairement à une équation différentielle d'ordre m , Eq. qui d'ailleurs est toujours la même, quel que soit le mode d'élimination que l'on ait employé. Car, si l'on pouvait trouver deux équations différentielles distinctes, on pourrait, entre ces deux équations, éliminer $\frac{d^m y}{dx^m}$, ce qui conduirait à une relation $\pi(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}) = 0$ impossible, puisque toutes les variables qui y entrent sont supposées pouvoir être prises à volonté.

Réciproquement, supposons qu'on nous donne une Eq. différentielle du m^e ordre

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

Intégrale, si elle existe, devra, pour avoir la même généralité, contenir m constantes arbitraires. De telle manière que, pour $x = a$, on puisse prendre à volonté $y = b$, $\frac{dy}{dx} = b'$, ..., $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$ et en tirer des valeurs correspondantes pour les constantes.

En effet, supposons (sans à le démontrer plus tard) qu'il existe une intégrale : — l'Eq. (1) qui m'est donnée, et seule donnée, me permet de prendre à volonté, pour $x = a$, $y = b$, $\frac{dy}{dx} = b'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = b''$, ..., $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$, et alors seulement l'Eq. (1) me donnera la m^e dérivée $\frac{d^m y}{dx^m}$, et pour finir évidemment toutes les autres : et en effet si je pose pour abréger

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = y^{(m-1)}, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = y^{(m)}$$

l'eq. (1) me donnera

$$(3) \quad \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dy'} y'' + \dots + \frac{dF}{dy^{(m)}} y^{(m)}$$

$y^{(m)}$ et le 2. membre de l'eq. (1). Donc, si je me donne $x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, y^{(m)}$ et $y^{(m+1)}$ s'ensuivent? - et il est évident qu'on trouverait de même toutes les dérivées suivantes. - L'Intégrale devra donc contenir m constantes arbitraires, et seulement m , de façon qu'on puisse bien prendre à volonté, pour $x=a$, y et les $(m-1)$ premières dérivées.

Cela posé, démontrons qu'il existe réellement une Intégrale, on nous donne l'eq. Différentielle

$$(1) \quad y^{(m)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

Remarquons d'abord que toute fonction $F(x, y) = q(x)$, peut s'écrire

$$(2) \quad y = q(a) + (x-a)q'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} q''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2 \dots (m-1)} q^{(m-1)}(a) + \frac{(x-a)^m}{1.2 \dots m} q^{(m)}(a) + \dots$$

pourvu qu'aucune dérivée ne soit infinie, et l'on peut en général choisir a de manière que cela n'arrive pas; et la série est toujours convergente quand x est suffisamment voisin de a .

Il suffit même d'arriver qu'on la série sera convergente quel que soit x . - Supposons que nous voulions imposer à l'eq. (2) la condition de satisfaire à l'eq. Différentielle proposée (1).

Pour cela, il faudra que, pour $x=a$, nous puissions prendre à volonté $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, c. ad. $q(a), q'(a), \dots, q^{(m-1)}(a)$

Mais prendrons donc arbitrairement $q(a)=b, q'(a)=b', \dots, q^{(m-1)}(a)=b^{(m-1)}$. De plus, il faudra que $q^{(m)}(a)$ et toutes les autres dérivées ne soient pas arbitraires, mais prennent les valeurs que l'on désireait de l'eq. (1). En d'autres termes, on devra avoir

$$q^{(m)}(a) = F(a, b, b', b'', \dots, b^{(m-1)})$$

De la même façon $y^{(m+1)}(a) =$ la valeur de $y^{(m+1)}$ tirée de l'équation (1), et dans laquelle on remplacerait x par a , et ainsi de suite. — Toutes ces substitutions faites, l'éq. (2) me donnera y en fonction de x et de m constantes arbitraires $b, b', b'', \dots b^{(m)}$.

Il s'agit maintenant que cette équation sera l'intégrale cherchée, et que toutes les conditions, précédemment exprimées comme nécessaires, sont aussi suffisantes. En effet, si nous remarquons que l'éq. (1) après le remplacement de $y^{(m)}$ par sa valeur tirée de l'éq. (1), s'est de la forme $y^{(m+1)} = F_1(x, y, b, b', \dots b^{(m)})$, et que de même on aurait $y^{(m+2)} = F_2(x, y, b, b', \dots b^{(m)})$, et ainsi de suite, — cette éq. (2) devient

$$(2) \quad y = b + (x-a)b' + \frac{(x-a)^2}{1.2}b'' + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2 \dots (m-1)}b^{(m-1)} + \frac{(x-a)^m}{1.2 \dots m}F_1(a, b, b', \dots b^{(m)}) \\ + \frac{(x-a)^{m+1}}{1.2 \dots (m+1)}F_2(a, b, b', \dots b^{(m)}) \\ + \frac{(x-a)^{m+2}}{1.2 \dots (m+2)}F_3(a, b, b', \dots b^{(m)}) \\ + \dots$$

et il est facile de voir que c'est l'intégrale générale. Car, d'abord, si l'on prend les dérivées successives, et qu'on y fasse $x=a$, on trouve

$$y = b \quad \frac{dy}{dx} = b' \quad \frac{d^2y}{dx^2} = b'' \quad \dots \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = b^{(m-1)}$$

toutes quantités arbitraires; puis, différenciant encore, et faisant $x=a$ dans le résultat:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F_1(a, b, b', \dots b^{(m)}) \quad \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} = F_2(a, b, b', \dots b^{(m)}) \quad \frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}} = F_3(a, b, b', \dots b^{(m)}) \text{ etc.}$$

Les mêmes résultats que donnerait l'éq. différentielle proposée. Donc enfin l'éq. (2) est bien l'intégrale générale de la proposée, en ce sens qu'elle est la solution la plus générale que celle-ci puisse admettre.

Est-ce à dire pour cela que l'éq. (2) contient toutes les solutions de l'éq. (1)? non certes, et l'éq. donnée peut admettre des solutions de la forme

$$y = c_l (x, k_1, k_2, \dots, k_l) \quad l < m$$

lesquelles sont les Intégrales générales d'Equations Différentielles d'un ordre moins élevé que la proposée, qu'on obtiendrait en éliminant les l constantes qui y entrent, et qui seraient de la forme

$$\Pi(x, y, y', y'', \dots, y^{(l)}) = 0$$

Comment peut-il arriver que ces solutions ne rentrent pas dans l'eq. (2) ? C'est qu'elles ne sont pas développables par la série de Taylor, parce qu'elles rendent infinis un ou plusieurs coefficients de cette série. — Et en effet, l'eq. q. permet de prendre arbitrairement pour $x=a$, y et les l premières dérivées; mais la $(l+1)^{\text{e}}$ et toutes les autres, en particulier la l^{e} , la $(l+1)^{\text{e}}$... jusqu'à la $(m-1)^{\text{e}}$, ne sont plus arbitraires, et s'expriment en fonction des $(l-1)$ premières et de x et de y . On conçoit d'après cela que, dans les fonctions déterminées $F, F', F'' \dots$ quand on remplace les quantités qui y entrent, $x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}$ non plus par des quantités toutes arbitraires, mais $y, y', y'', \dots, y^{(l-1)}$ seulement par des constantes arbitraires, et les autres par des valeurs dépendantes de ces mêmes constantes, — on conçoit aisément qu'une ou plusieurs de ces fonctions F soit indéfiniment infinie, bien que cela n'ait pas lieu quand les quantités $y, y', y^{(m-1)}$ sont toutes remplacées par des constantes arbitraires. — Dans ce cas, l'eq. q. prend le nom de Solution Singulière de l'eq. différentielle proposée. Son caractère essentiel est de renfermer un moins grand nombre de constantes que l'intégrale générale, et de ne pouvoir se déduire de cette Intégrale générale par la particularisation de quelques unes de ses constantes: c'est, on n'aurait plus, dans ce

Dernier cas, une solution singulière, mais une intégrale particulière
 de l'Eq. donnée. - Cela montre bien que, dans les Eq. différentielles
 du premier ordre, les relations particulières singulières sont des relations
 déterminées entre x et y , sans aucune constante. - on voit
 de plus que le caractère général des Solutions singulières est
 de transformer l'indéfini en plusieurs des coefficients
 de la série qui donne l'intégrale générale. - car, si cela
 n'arrivait pas, il est visible que l'intégrale singulière pourrait
 se développer en série, et que, en l'identifiant avec l'intégrale
 générale, ce qui serait alors possible, elle deviendrait une
 intégrale particulière.

En résumé, une chose surtout se trouve jusqu'à présent
 démontrée, c'est que l'Eq. différentielle donnée (1) a toujours
 une intégrale, qu'on peut représenter par la série (2).

Toutes les fois que l'on saura sommer cette série, on aura
 une équation finie $y = V(x, b, b', \dots, b^{(m-1)})$ qui sera par
 conséquent l'intégrale générale.

Réciproquement. Toute fonction

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$$

renfermant m constantes arbitraires, et satis faisant à l'Eq. (1);
 c. à d. telle que, si on la suppose résolue

$$(3) \quad y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_m)$$

et si on la différentie $m-1$ fois, de manière à avoir

$$y' = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) \quad y'' = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) \quad \dots \quad y^{(m-1)} = \left(\frac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}}\right)$$

on aura, Des équations ainsi formées, tirées sans incompatibilité
 ni indétermination, les m constantes c_1, c_2, \dots, c_m : - cette équation

est identique avec l'Intégrale Générale dont la série (2) représente le Développement.

Cela ne soulève aucune difficulté. Car l'Eq. (2), développée en Série, donne

$$y = q(a, c, \dots) + (x-a) q'(a, c, \dots) + \frac{(x-a)^2}{1.2} q''(a, c, \dots) + \dots \\ + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2 \dots (m-1)} q^{(m-1)}(a, c, \dots) + \frac{(x-a)^m}{1.2 \dots m} q^{(m)}(a, c, \dots) \\ + \frac{(x-a)^{m+1}}{1.2 \dots (m+1)} q^{(m+1)}(a, c, \dots) + \text{etc.}$$

Or $q, q', q'', \dots, q^{(m-1)}$ doivent recevoir des valeurs arbitraires. Ailleurs $q^{(m)}, q^{(m+1)}, q^{(m+2)}, \dots$ doivent être identiquement 0, 0, 0, 0, ... puisque l'Eq. (2) vérifie la proposition. Donc la dernière Equation, et par conséquent l'Eq. (2), coïncide bien identiquement avec la série (1) c.q.f.d.

Permettons enfin par quelques autres remarques Générales.

Supposons qu'on nous donne une Eq. Différentielle

$$(1) \quad y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

et que son Intégrale Générale soit

$$(2) \quad F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$$

Si l'on différencie m fois celle-ci

$$\left. \begin{aligned} dF &= 0 \\ d^2F &= 0 \\ \vdots \\ d^{m-1}F &= 0 \\ d^mF &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Si, entre l'Equation (2) et les m suivantes, on élimine les m constantes, on retombe identiquement sur l'Eq. Différentielle proposée (1) : - on sait cela.

Supposons maintenant qu'on ne prenne pas une des Eq. (2)

et que, entre les m qui restent, on élimine $m-1$ constantes, par exemple $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$: l'éq. résultante, qui sera de la forme

$$c_1 = \varphi_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

est dite une Intégrale première de l'éq. Différentielle proposée, et laquelle est en quelque sorte une première Intégration effectuée : on aura de même $m-1$ autres Intégrales premières

$$c_2 = \varphi_2(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

$$c_3 = \varphi_3(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

$$\dots$$

$$c_m = \varphi_m(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

Si l'on connaitrait les m Intégrales premières, il est évident qu'on éliminerait entre elles les $m-1$ Derivées qui y entrent, on retomberait sur l'Intégrale Générale (2).

Observons que ces Intégrales premières sont indépendantes du mode de calcul qu'on a employé, pour l'obtenir. — Car, si l'on en pouvait trouver deux distinctes, relativement à une même Constante,

$$c_1 = \varphi_1(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

$$c_2 = \psi_1(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

en éliminant c_1 , on aurait une relation

$$\pi(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) = 0$$

impossible, puisque, pour $x=a$, on peut prendre à volonté y et les $m-1$ premières Derivées.

1^{re} Equation

$$c_1 = \varphi_1(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

Si on la différentie, donne

$$0 = \frac{d\varphi_1}{dx} + y' \frac{d\varphi_1}{dy} + \dots + y^{(m)} \frac{d\varphi_1}{d y^{(m-1)}}$$

1^{re} à je devrais pour $y^{(m)}$ une valeur qui devra être Dérivée

à celle que me donne l'Eq. (1) - on connaît l'utilité de cette remarque dans le cas où l'on ne saurait pas résoudre en $y^{(m)}$ l'Eq. donnée, et où l'on pourrait cependant trouver une de ses intégrales premières.

Une Intégrale Seconde contient deux constantes, et provient de l'élimination de $(m-2)$ autres. Evidemment, il y a $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ manières d'obtenir des Intégrales-Secondes, et par conséquent tout autant de ces Intégrales. - Cela ne veut pas dire qu'elles soient toutes distinctes. Et en effet, si j'en prends deux, l'une en c_h et c_k , l'autre en c_h et c_e , leur ensemble, par l'élimination de c_h , donnera une relation entre c_e et c_k , laquelle évidemment ne devra pas différer de l'intégrale Seconde en c_e et c_k obtenue directement.

En général, il y a $\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$ manières d'obtenir des Intégrales $n^{\text{ièmes}}$, contenant n constantes.

Dans ces déterminations du nombre des constantes, il faut bien faire attention si elles sont réellement distinctes, et leur nombre aussi grand qu'il le paraît d'abord. - Supposons par exemple qu'elle donne

$$y = c e^{ax+\beta} + c' e^{ax+\gamma}$$

au premier abord, on serait tenté de croire qu'il y a deux constantes arbitraires: il n'en est rien cependant. car on a

$$y = (c e^{\beta} + c' e^{\gamma}) e^{ax} = c'' e^{ax}$$

De même si l'on avait

$$y = c \sin(ax+b) + c' \sin(ax+b') + c'' \sin(ax+b'')$$

on peut voir que ce n'est pas là l'intégrale Générale d'une Equation Différentielle du troisième ordre. En effet, faisons $a=0$, nous aurons

$$y_0 = c \sin b + c' \sin b' + c'' \sin b''$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = c'a \cos b + c'a' \cos b' + c''a' \cos b''$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -a^2(c \sin b + c' \sin b' + c'' \sin b'') = -a^2 y.$$

on ne peut donc se donner à volonté que y_0 et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$: Donc la proposition est que l'intégrale d'une eq. du second ordre : — Et d'ailleurs, il est facile de voir que le nombre des constantes de l'intégrale est deux. Car on peut écrire

$$y = \begin{cases} \sin ax \{ c \cos b + c' \cos b' + c'' \cos b'' \} \\ + \cos ax \{ c \sin b + c' \sin b' + c'' \sin b'' \} \end{cases}$$

ce qui revient à

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$$

Ces généralités une fois établies, nous allons entrer dans le détail des quelques cas particuliers où l'on peut effectuer l'intégration des équations différentielles d'ordres supérieurs.

I.

Nous examinerons d'abord le cas où l'on a simplement :

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = X$$

X étant fonction d' x seulement. — Dans ce cas, on intégrera par une suite de quadratures. Car si l'eq. (1) donne

$$d. \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = X dx$$

d'où

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \int X dx + C_1$$

C'est une Intégrale primitive de la proposée. — on en tire

$$d. \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = dx \int X dx + C_1 dx$$

Donc

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \{ \int X dx \} dx + C_1 x + C_2$$

ce que nous représenterons ainsi

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int^2 X dx + C_1 x + C_2$$

et, en continuant ainsi, on arrivera évidemment à l'Intégrale

$$y = \int^m X dx + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_{m-1} x + C_m$$

Sur cette forme, l'intégration peut être mise sous forme compliquée.

Pourant, on présente le résultat sous un autre aspect. En effet

on a

$$\int dx (\int X dx) = x \int X dx - \int x X dx$$

De même

$$\begin{aligned} \int dx \{ \int dx [\int X dx] \} &= \frac{1}{1.2} \int (2x \int X dx - 2 \int x X dx) dx \\ &= \frac{1}{1.2} (x^2 \int X dx - \int x^2 X dx - 2x \int x X dx + 2 \int x^2 X dx) \\ &= \frac{1}{1.2} (x^3 \int X dx - 2x \int x X dx + \int x^2 X dx) \end{aligned}$$

Donc, par analogie,

$$\int^m X dx = \frac{1}{1.2 \dots (m-1)} \left(x^{m-1} \int X dx - (m-1)x^{m-2} \int x X dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} \int x^2 X dx - \dots \pm \int x^{m-1} X dx \right)$$

\pm selon que m est impair ou pair. — Nous démontrons la généra-

lité de ce résultat en employant la méthode ordinaire : on multi-

plie la formule ci-dessus par dx : on divise et multiplie le

second membre par m ; on intègre séparément par parties

On aura Du Terme Du Second membre, et en réduisant, on trouve que celui demeurant, parce que le coefficient De la Dernière Intégrale se trouve être le Développement De $(-1)^m$ ou ∓ 1 , selon que m est Impair ou pair. - Le calcul est facile.

Cette forme De l'Intégrale est plus simple, en ce sens qu'elle ne renferme pas 2 Intégrales Superposées.

II.

Supposons une Equation ne contenant ni x ni y , mais seulement Deux Dérivées consécutives, par exemple

$$(1) \quad f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right) = 0$$

Soit

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = p$$

Soit

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{dp}{dx}$$

L'Equation (1) devient alors

$$(2) \quad f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

Il faut à présent cette Eq. qui est Du 1^{er} ordre, et ne contient que p et x . C'est un cas que nous avons examiné déjà (p. 269). - Si l'on veut résoudre par rapport à $\frac{dp}{dx}$, on aura

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p)$$

$$dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$$

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} \quad \psi(p, c_1) = \int \frac{dp}{\varphi(p)}$$

Si l'on veut résoudre cette Equation, et en tirer

$$p = \pi(x, c_1)$$

c. à d.

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \pi(x, c_1)$$

on en déduit immédiatement

$$y = \int \pi(x, c_1) dx + c_2 x^{m-2} + c_3 x^{m-3} + \dots + c_{m-1} x + c_m$$

et c'est bien l'intégrale générale, puisqu'elle contient m constantes complètement arbitraires, comme il serait facile de le vérifier.

Si l'éq. $x = \psi(p, c_1)$ n'aurait pu être résolue par rapport à p , on aurait cependant pu arriver à l'intégrale générale. — En effet, nous avons pu!

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p$$

cela revient à

$$d. \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p dx$$

et, comme nous avons $dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$,

$$d. \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \frac{p dp}{\varphi(p)}$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \int \frac{p dp}{\varphi(p)} + C_2$$

ce qui revient à

$$d. \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \left\{ \int \frac{p dp}{\varphi(p)} + C_2 \right\} \frac{dp}{\varphi(p)} = \varphi_1(p) dp$$

d'où

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \varphi_1(p) dp + C_3$$

et ainsi de suite. on arrivera ainsi à une équation finie entre p et $m-1$ constantes, et l'on éliminera p entre cette équation et l'éq. $x = \psi(p, c_1)$. on aura ainsi l'intégrale générale.

Dans tout cela, nous avons supposé que l'éq. (2) pouvait se résoudre par rapport à $\frac{dp}{dx}$. Mais il pourrait arriver que cela fût impossible, et qu'on sût résoudre seulement par rapport à p . alors on en tirerait

$$p = \omega \left(\frac{dp}{dx} \right)$$

on écrit, en posant $\frac{dp}{dx} = z$,

$$p = \omega(z)$$

$$dp = \omega'(z) dz$$

$$z dx = \omega'(z) dz$$

$$dx = \frac{\omega'(z)}{z} dz$$

$$x = \int \frac{\omega'(z)}{z} dz + C,$$

Si maintenant on élimine z entre cette eq. et $p = \omega(z)$, on aura une eq. de la forme

$$x = \psi(p, C)$$

comme avant à l'égard de p à partir de là, le calcul s'achève de même.

Exemple. — Trouver une courbe telle que son rayon de courbure soit constant.

on pose immédiatement l'équation

$$\frac{(1+p^2)^{3/2}}{\frac{dp}{dx}} = a$$

Ainsi

$$dx = \frac{a dp}{(1+p^2)^{3/2}} \quad x - c = a \int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = a \int \frac{p^{-3} dp}{(1+\frac{1}{p^2})^{3/2}} = -\frac{a}{2} \int \frac{d \cdot \frac{1}{p^2}}{(1+\frac{1}{p^2})^{3/2}} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

On élimine immédiatement

$$(1+p^2)(x-c)^2 = a^2 p^2 \quad p^2 = \frac{(x-c)^2}{a^2 - (x-c)^2} \quad dy = \pm \frac{(x-c) dx}{\sqrt{a^2 - (x-c)^2}} \quad y - c_1 = \pm \sqrt{a^2 - (x-c)^2}$$

et enfin

$$(y-c_1)^2 + (x-c)^2 = a^2$$

Equation d'un cercle de centre $g.c.$ et de rayon a .

III.

Supposons encore que l'eq. ne contienne que deux coefficients dif. fonctionnels, mais que ceux-ci diffèrent de deux ordres. Soit

$$(1) \quad f \left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right) = 0$$

Posons

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = p \quad \text{donc} \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^1 p}{dx^1}$$

l'eq. proposée devient

$$(2) \quad f\left(\frac{d^2p}{dx^2}, p\right) = 0$$

Supposons que l'on puisse éliminer cette eq. et en tirer

$$\frac{d^2p}{dx^2} = q(p)$$

en multipliant la Dux membre par $2 dp$, on aura

$$2 \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d^2p}{dx^2} = 2 q(p) dp$$

ou

$$2 \frac{dp}{dx} d\left(\frac{dp}{dx}\right) = 2 q(p) dp$$

c.àd.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2 \int q(p) dp + C_1$$

et l'on est ramené à une quadrature, car on tire de là

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2 \int q(p) dp + C_1}}$$

donc

$$(3) \quad x = \int \frac{dp}{\sqrt{2 \int q(p) dp + C_1}} + C_2$$

Si maintenant cette eq. peut se résoudre par rapport à p , elle donnera

$$p = \pi(x, c_1, c_2)$$

c.àd.

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \pi(x, c_1, c_2)$$

et cette Intégrale Seconde de la proposée donnera, pour l'Intégrale générale,

$$y = \int^{\pi} \pi(x, c_1, c_2) dx + c_3 x^{m-2} + c_4 x^{m-4} + \dots + c_{m-1} x + c_m$$

Si l'eq. (3) ne peut se résoudre en p , on aurait fait comme dans le cas précédent: on se serait rappelé que

$$d \cdot \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = p dx = \frac{p dp}{\sqrt{2 \int q(p) dp + C_1}}$$

donc

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \frac{p dp}{\sqrt{2 \int q(p) dp + C_1}} + C_2 = \chi(p, c_1) + c_2$$

et l'on continuerait de même.

Comme cas particuliers, on pourrait prendre celui de l'éq.

$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$. Mais dans ce cas, il y a des méthodes quelconques préférables, et que nous verrons plus loin.

IV.

Il peut arriver que l'équation ne continue que x avec diverses dérivées. alors on a

$$(1) \quad f\left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \dots, \frac{d^{m+k} y}{dx^{m+k}}\right) = 0$$

Cette équation s'abaisse de m ordres: car, en posant

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p$$

elle devient

$$(2) \quad f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \frac{d^2 p}{dx^2}, \dots, \frac{d^k p}{dx^k}\right) = 0$$

Il restera à intégrer cette équation, si on le peut. — Supposons cette opération effectuée:

$$p = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

cela revient à

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

alors une formule connue donnera l'intégrale.

Exemple. — On demande une courbe plane telle que son rayon de courbure soit une fonction déterminée de l'abscisse.

L'équation sera

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \varphi(x) \quad \left\{ p = \frac{dy}{dx} \right\}$$

Si on

$$\frac{dx}{\varphi(x)} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \int \frac{dx}{\varphi(x)} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1$$

Si par exemple $\varphi(x) = \frac{a^2}{x^2}$, ce qui revient à dire que le rayon de courbure varie en raison inverse du double de l'abscisse, on aura

$$\int \frac{x dx}{a^2} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1 \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1 \quad (1+p^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - C_1\right)^2 = p^2 \quad p = \pm \frac{\frac{x^2}{a^2} - C_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} - C_1\right)^2}}$$

Cette expression, qu'on a eu lieu d'étudier, ne peut s'intégrer sous forme finie: elle se ramène aux fonctions elliptiques. Elle représente la Courbe Élastique, i. e. la courbe que figure une verge élastique fixée horizontalement à une de ses extrémités, et portant un poids à l'autre.

V.

Un cas analogue au précédent, est celui où l'on a l'équation

$$(1) \quad f\left(y, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \dots, \frac{d^{m+k} y}{dx^{m+k}}\right) = 0$$

L'ordre de l'équation n'est abaissé plus de m unités. Pour le voir, il faut avoir recours à une transformation, à un changement de Variable, afin de rentrer dans le cas précédent: on prendra y pour nouvelle variable indépendante. Usons pour ce que deviennent alors les diverses dérivées, et d'abord, posons

$$\frac{dy}{dx} = p$$

puis, cherchons les dérivées suivantes en fonction de p et de y .

Pour cela, rappelons-nous que le coefficient différentiel du 1^{er} ordre, $\frac{dy}{dx}$, peut toujours être regardé comme le quotient de deux différentielles prises par rapport à une autre Variable, et qu'on a toujours

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

puis, remarquons que x et p peuvent être regardés comme des fonctions de y . Cela posé, on aura

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dy}}{\frac{dx}{dy}} = p \frac{dp}{dy}$$

De même

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{\frac{dx}{dy}} = p \left\{ \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dp}{dy} + p \frac{d^2 p}{dy^2} \right\}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}$$

De même encore

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)}{\frac{dx}{dy}} = p \left\{ \left(\frac{dp}{dy} \right)^3 + 4p \frac{dp}{dy} \frac{d^2 p}{dy^2} + p^2 \frac{d^3 p}{dy^3} \right\}$$

et ainsi de suite. Tous ces résultats sont homogènes par rapport à p et ses diverses dérivées, et le degré est égal à l'indice de différentiation. De plus, on voit que, dans $\frac{d^h y}{dx^h}$ entre au plus $\frac{d^{h-1} p}{dy^{h-1}}$.

D'après cela, si, dans l'éq. proposée (1), on remplace les divers coefficients différentiels par leurs valeurs, on aura évidemment un résultat tel que

$$Q\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{m+k-1}p}{dy^{m+k-1}}\right) = 0$$

l'ordre de l'équation n'est abaisé que d'une unité.

Exemple. - Trouver une courbe plane dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel à la tangente de la normale.

on a

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} \quad N = y \sqrt{1+p^2}$$

L'équation du problème est donc

$$(1) \quad \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \pm ay \sqrt{1+p^2}$$

Je mets le double signe, parce que je dois prendre $\pm (1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ selon que $\frac{dp}{dx}$, c.à.d. $\frac{dy}{dx}$ est positif ou négatif, c.à.d. selon que la courbe est convexe ou concave. Donc, selon que je prendrai l'un ou l'autre signe, je devrai trouver une courbe convexe ou concave. Cette eq. (1), telle qu'elle est, n'est pas intégrable, puisqu'elle contient 3 variables, p, x, y . Supposons $\frac{dp}{dx}$ par sa valeur $p \frac{dp}{dy}$ que nous venons de trouver: il viendra:

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p \frac{dp}{dy}} = \pm ay \sqrt{1+p^2}, \quad 1+p^2 = \pm ay p \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dy}{y} = \pm \frac{ap dp}{1+p^2}, \quad \int \frac{y}{c} = \pm \frac{a}{c} \int (1+p^2)$$

$$\pm \frac{1}{a} \int \frac{y}{c} = \int (1+p^2)$$

$$\int \left\{ \left(\frac{y}{c} \right)^{\pm \frac{1}{a}} \right\} = \int (1+p^2)$$

$$\left(\frac{y}{c} \right)^{\pm \frac{1}{a}} = 1+p^2$$

Où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{c} \right)^{\pm \frac{1}{a}} - 1}$$

$$(2) \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c} \right)^{\pm \frac{1}{a}} - 1}}$$

Cette expression ne peut être intégrée quand a est quelconque. Cela peut se faire toutefois pour $a=1$ et $a=2$, en étant un entier quelconque. Dans le premier cas, en effet, si l'on prend le signe +, l'éq. (2) devient $dx = c^{\frac{1}{2}} dy \left(y^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$, et en posant $y^{\frac{1}{2}} = z$, il est visible qu'on arrive à une expression que l'on sait intégrer. - Et en ut de même pour le cas où l'on prendrait le signe - : alors l'éq. (2) devient $dx = y^{\frac{1}{2}} dy \left(c^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$ et l'on arrive à une expression intégrable en posant $y^{\frac{1}{2}} = z$. - Ainsi les résultats généraux nous ont rien de bien remarquable.

Des valeurs particulières de a fournissent des résultats intéressants. C'est $a=1$ et $a=2$.

Preons $a=1$ et le signe +. l'Eq. (1) devient

$$dx = \frac{c dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} \quad \frac{x-c_1}{c} = \int (y + \sqrt{y^2 - c^2})$$

de q. on peut écrire, aussi

$$\frac{x-c_1}{c} = \int \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} \right)$$

ou

$$c e^{\frac{x-c_1}{c}} = y + \sqrt{y^2 - c^2} \quad (2)$$

En multipliant les deux membres par $y - \sqrt{y^2 - c^2}$, il vient

$$c e^{\frac{x-c_1}{c}} (y - \sqrt{y^2 - c^2}) = c^2$$

ou

$$c e^{-\frac{x-c_1}{c}} = y - \sqrt{y^2 - c^2} \quad (3)$$

ajoutant les Eq. (2) et (3), qui ne sont que deux formes différentes d'une même Eq., on a

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}} \right)$$

Equation représentant une courbe qui a des branches infinies, puisque y augmente indéfiniment en même temps que x . - Il y a un minimum pour y : car, si $y < c$, l'Eq. différentielle montre que dx devient imaginaire. Donc il y a un point de la courbe plus bas que tous les autres. Prenons place du y passant par ce point, et perp. à l'axe des x , qui lui, nous a été donné une fois, et ne peut plus être changé. alors, pour $x=0$, je devrai avoir $y=c$: donc

$$c = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{c_1}{c}} + e^{-\frac{c_1}{c}} \right) \quad 2 = e^{\frac{c_1}{c}} + e^{-\frac{c_1}{c}}$$

ou $c_1=0$. l'Eq. devient alors

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

C'est l'Eq. d'une cycloïde. - la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y : c'est-à-dire de l'axe de courbure est égal à la normale.

Preons actuellement $a=1$ et le signe -. l'Eq. (1) devient

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} \quad x-c_1 = \sqrt{c^2 - y^2} \quad (x-c_1)^2 + y^2 = c^2$$

Equation représentant une infinité de cercles dont le rayon est arbitraire, mais dont les centres sont sur l'axe des x .

Preons $a=2$ et le signe +. Nous aurons

$$dx = 2\sqrt{c} \frac{dy}{2\sqrt{y-c}} \quad (x-c_1)^2 = 4c(y-c) \quad y-c = \frac{(x-c_1)^2}{4c}$$

Equation d'un ensemble de paraboles dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x .

Enfin, avec $a=2$ et le signe -, nous avons

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Equation d'une cycloïde dont la base est l'axe des x , et dont le cercle générateur a pour rayon l'arbitraire $\frac{c}{2}$.

autre Exemple. - on rencontre, à propos du mouvement d'un mobile lancé en l'air, un signe double, et l'on a la pesanteur qui varie, et à la résistance de l'air

qui est proportionnelle au carré de la vitesse, - l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 f(y) + q(y) = 0$$

ou $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dy}{dy}$, Donc

$$p \frac{dp}{dy} + p^2 f(y) + q(y) = 0$$

lequel on peut écrire

$$\frac{d(p^2)}{dy} + 2p^2 f(y) + 2q(y) = 0$$

équation linéaire en p^2 : ce qui si y a de remarquable, c'est que, si la résistance de l'air avait varié proportionnellement à la simple vitesse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurait été remplacé par $\frac{dy}{dx}$, et l'éq. n'aurait plus été intégrable.

VI.

Nous arrivons au cas où les deux variables entrent dans l'éq. avec les divers coefficients différentiels.

1°. Supposons une équation homogène pour rapport à y et à toutes les dérivées :

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0$$

Soit m le Degré d'Homogénéité. Si je divise par y^m , l'éq. deviendra

$$(2) \quad \varphi\left(x, \frac{dy}{y}, \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{y}}, \dots\right) = 0$$

Posons actuellement

$$\frac{dy}{y} = u$$

$$\frac{dy}{y} = u dx$$

$$y = e^{\int u dx}$$

Il en résulte

$$\frac{dy}{dx} = u e^{\int u dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int u dx} \left(\frac{du}{dx} + u^2 \right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int u dx} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3u \frac{du}{dx} + u^3 \right)$$



et en général

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{\int u dx} \left(\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \text{etc} + u^n \right)$$

Substituant, l'équation deviendra

$$\pi \left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} \right) = 0$$

si k était l'ordre de différentiation le plus élevé dans la proposée; et celle-ci sera ainsi abaissée d'un ordre. — Mais cette transformation est royalement utile.

2°. Nous considérons encore le cas d'une équation

$$(1) \quad f \left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m} \right) = 0$$

ne contenant pas x , et homogène par rapport aux dérivées considérées comme des facteurs élevés à des puissances marquées par l'indice; c'est-à-dire que si l'on représente ces dérivées symboliquement par d , d^1 , d^2 , ..., d^m , l'éq. sera homogène en d . alors l'équation s'abaisse de deux ordres. — En effet, changeons de variable indépendante, et posons

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{donc} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}, \text{ etc}$$

Substituons dans l'éq. (1) elle prendra la forme

$$(2) \quad \varphi \left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{m-1} p}{dy^{m-1}} \right) = 0$$

et sera déjà abaissée d'un ordre. — Maintenant, cette transformation a ce caractère que chaque dérivée $\frac{d^n y}{dx^n}$ est remplacée par une fonction de p et des dérivées homogènes du degré n . Donc, d'après cela et d'après la nature particulière de l'équation (1), on voit que l'éq. (2) sera homogène en p , $\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^2 p}{dy^2}$, ... chaque de ces dérivées étant maintenant considérée comme un facteur unique. Donc, en posant

$$p = e^{\int u dy}$$

l'équation s'abaissera encore d'un ordre.

Exemple. - Soit l'équation

$$(1) \quad M \frac{d^2 y}{dx^2} + N \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + P \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

M, N, P étant des fonctions de y seulement. - Remplaçant $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}$ par

$$M p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + M p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + N p^2 \frac{dp}{dy} + P p^3 = 0$$

ce qu'on peut écrire

$$(2) \quad M \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + M \left(\frac{d^2 p}{dy^2} \right) + N \left(\frac{dp}{dy} \right) + P = 0$$

Posons

$$\frac{dy}{p} = u \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dy} = u e \quad \text{et} \quad \frac{d^2 p}{dy^2} = \left(u' + \frac{du}{dy} \right) e$$

Remplaçant dans l'éq. (2), il vient

$$M u'^2 + M \frac{du}{dy} + N u + P = 0$$

ou

$$(3) \quad \frac{du}{dy} + 2u^2 + \frac{N}{M} u + \frac{P}{M} = 0$$

c'est l'équation d'Euler. on pourra donc la résoudre toutes les fois qu'on connaîtra une solution particulière $u = Y$.

Un cas particulier de ce problème, c'est celui où l'on se propose de résoudre la question suivante:

Trouver une fonction qui soit à sa dérivée première comme sa dérivée seconde et à sa dérivée troisième: - l'éq. est

$$y : \frac{dy}{dx} :: \frac{d^2 y}{dx^2} : \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

alors, $P=0$, $M=y$, et $N=-1$. l'éq. (3) devient

$$\frac{du}{dy} + 2u^2 - \frac{u}{y} = 0$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{1}{y} u = -2u^2$$

c'est l'éq. de Bernoulli; on peut donc intégrer.

Enfin, nous n'avons donné que des exemples fort incomplètes; nous en aborderons une beaucoup plus satisfaisante.

Equations Linéaires D'ordre quelconque.

Les Equations sont de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V$$

Les dérivées ni la fonction ne se multiplient jamais entre elles, et les coefficients étant des fonctions quelconques d' x .

Il y a deux grandes classes d'Equations linéaires à considérer, suivant que le 2^e membre V est nul ou ne l'est pas.

I. Equations Linéaires sans Second membre.

Une particulière Equation est de la forme

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

Théorème. — Si l'on connaît un certain nombre des Solutions de l'eq. (1), leur somme est aussi une Solution de cette même Equation.

Soient en effet

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad \dots \quad y = y_p$$

p solutions de l'Equation (1), on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^m y_1}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dy_1}{dx} + Uy_1 = 0 \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dy_2}{dx} + Uy_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^m y_p}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_p}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dy_p}{dx} + Uy_p = 0 \end{array} \right.$$

ajoutant toutes ces Equations, et observant que $d^n A + d^n B = d^n (A+B)$,
on démontre le Théorème.

on voit ainsi que la Somme de Toutes ces Solutions, multipliées
chaque par une constante arbitraire, sera encore une Solution de
la proposée.

Cas, 1: $y = y_m$ satisfait à l'Eq. (1), $y = C y_m$ satisfera également.
C'est évident.

Si donc on parvient à découvrir m Solutions particulières de
la proposée, y_1, y_2, \dots, y_m , on aura l'intégrale Générale
en prenant

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m$$

Cependant, pour que ce soit bien l'intégrale Générale, il
faut qu'entre les quantités y_1, y_2, \dots, y_m il n'existe pas
de relations telles que le nombre des constantes se trouve diminué.

Cherchons, D'après cela, à résoudre l'Equation (1).

Pour cela remarquons qu'on peut l'abaisser en lui appliquant
la Théorie des fonctions homogènes par rapport à la fonction
et à ses dérivées. Soient donc

$$y = e^{\int u dx}$$

Donc on a en général

$$\frac{d^p y}{dx^p} = e^{\int u dx} \left(\frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}} + \dots + H \frac{du}{dx} + u^p \right)$$

Si maintenant de là les divers coefficients différentiels, qu'on
lui reporte dans l'Eq. (1), celle-ci prend la forme

$$(2) \quad \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + M \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + N \frac{du}{dx} + (u^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \dots + Tu + V) = 0$$

L'Equation se trouve ainsi abaissée d'un ordre. — Cherchons
des valeurs de u qui y satisfassent. — or, prenons l'Equation

$$(3) \quad u^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \dots + Tu + U = 0$$

il peut arriver que, a , étant une constante, $u = a$, vérifie cette équation: alors, il est visible que $u = a$, satisfait aussi l'éq. (2), puisque les dérivées d'une quantité constante sont nulles. alors $y = e^{ax}$ est une solution de l'éq. proposée (1). Et de même, chaque racine constante de l'éq. (3) donne une solution particulière de la proposée.

Si maintenant tous les coefficients de l'éq. (3), c.àd. ceux de l'éq. donnée, sont constants, toutes les m racines de l'éq. (3) seront constantes, et donneront les m solutions particulières

$$y_1 = e^{a_1 x} \quad y_2 = e^{a_2 x} \quad \dots \quad y_m = e^{a_m x}$$

et l'intégrale générale de l'éq. proposée sera par conséquent

$$(4) \quad y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + c_3 e^{a_3 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

Il y a une autre méthode, moins naturelle il est vrai, mais plus prompt, pour arriver à ce résultat. — Cherchons s'il est possible de trouver pour l'éq. (1) des solutions de la forme

$$y = c e^{ux}$$

u étant un coefficient déterminé, c une constante arbitraire. Nous aurons alors

$$\frac{dy}{dx} = c u e^{ux} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = c u^2 e^{ux} \quad \dots \quad \frac{d^m y}{dx^m} = c u^m e^{ux}$$

en substituant dans la proposée, $c e^{ux}$ s'en va comme facteur commun, et il reste

$$u^m + Pu^{m-1} + Qu^{m-2} + \dots + Tu + U = 0$$

L'hypothèse dont nous sommes partis est donc admissible, et donnera autant de solutions que la dernière équation admet de racines constantes, et l'intégrale générale si l'éq. proposée a tous ses coefficients constants.

Il se présente une difficulté. L'Eq. (4) n'est bien l'intégrale générale de l'Eq. (1) que dans le cas où toutes les constantes de l'Eq. (3) sont égales. — Démontrons d'abord, ce qui n'est pas évident a priori, que dans ce cas on a bien l'intégrale générale, c. à d. que, pour $x=a$, on peut prendre arbitrairement y et ses $m-1$ premières dérivées, et en tirer les m constantes. — A l'abord, au lieu de $x=a$, nous pourrions prendre $x=0$. L'Eq. (4) peut très bien s'écrire

$$y = c_1 e^{a_1(x-a)} + c_2 e^{a_2(x-a)} + \dots + c_m e^{a_m(x-a)}$$

et, faite $x=a$ dans cette équation, on $x=0$ dans l'Eq. (4), c'est absolument la même chose. — Cela posé, si nous prenons les valeurs de y et de ses $(m-1)$ premières dérivées; si, dans ces valeurs, nous faisons $x=0$, et si nous les égalons alors à une valeur prise arbitrairement que nous continuerons de désigner par $b, b', b'', \dots b^{(m-1)}$, nous aurons les m équations

$$\left\{ \begin{aligned} b &= c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_m \\ b' &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \dots + c_m a_m \\ b'' &= c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 + \dots + c_m a_m^2 \\ &\dots \\ b^{(m-1)} &= c_1 a_1^{m-1} + c_2 a_2^{m-1} + c_3 a_3^{m-1} + \dots + c_m a_m^{m-1} \end{aligned} \right.$$

Note à savoir maintenant si ces m équations du 1^{er} degré donneront pour $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ des valeurs finies et déterminées. Pour le reconnaître, multiplions la 1^{re} par k , la 2^e par k' , la 3^e par k'' , ... la $(m-1)^e$ par $k^{(m-1)}$, la dernière par 1, et ajoutons: nous aurons

$$kb + k'b' + k''b'' + \dots + k^{(m-1)}b^{(m-1)} + b^{(m)} = c_1 k(a_1) + c_2 k(a_2) + \dots + c_m k(a_m)$$

on pourra pour abréger

$$q(a) = k + k'a + k''a^2 + \dots + k^{(m-1)}a^{m-1} + a^m$$

On pourra maintenant les valeurs de une des constantes, c , par ex.
Pour cela, on connaît la méthode: il faut égaler à zéro les coeff.
-ficients de toutes les autres inconnues, et poser

$$(A) \quad \begin{cases} q(a_1) = 0 \\ q(a_2) = 0 \\ \vdots \\ q(a_m) = 0 \end{cases}$$

puis tirer de là $k, k', k'', \dots, k^{(m-1)}$ et reporter leurs valeurs dans
celle de c . — or, au lieu de faire une élimination pénible, remar-
quons que, se donner les eq. (A), c'est exprimer que les $(m-1)$
quantités $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ vérifient l'eq. $q(a) = 0$, laquelle
ne peut d'ailleurs avoir que $(m-1)$ racines: c'est donc poser

$$q(a) = 0$$

$q(a)$ étant de la forme

$$q(a) = (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3) \dots (a-a_m)$$

or on a d'autre part

$$q(a) = k + k'a + k''a^2 + \dots + a^m$$

ces deux valeurs de $q(a)$ doivent être identiques. Si donc j'
parviens à trouver le développement de la première, j'aurai
facilement k, k', \dots par une identification des coefficients des
mêmes puissances de a . — or, si l'on désigne par $f(a)$ le
1^{er} membre de l'eq. (3), c.à.d.

$$f(a) = a^m + Ta^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + V = 0$$

Dont les racines sont par hypothèse a, a_2, a_3, \dots, a_m , on aura

$$f(a) = (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3) \dots (a-a_m)$$

Donc

$$q(a) = \frac{f(a)}{a-a_1}$$

on sait développer $\frac{f(a)}{a-a_1}$, on aura donc l'unique

$$k + k'a + k''a^2 + \dots + k^{(m-2)}a^{m-2} + k^{(m-1)}a^{m-1} = a + a_1 + \dots + a_{m-1} + \left| \begin{array}{c} + Pa_1 \\ + Pa_1^2 \\ + Pa_1^3 \\ \dots \\ + Pa_1^{m-1} \\ + Qa_1^{m-2} \\ \dots \\ + T \end{array} \right|$$

$$k = a_1 + Pa_1^{m-1} + Qa_1^{m-2} + \dots + T$$

$$k^{(m-2)} = a_1 + Pa_1 + Q$$

$$k^{(m-1)} = a_1 + P$$

Ces valeurs n'ont rien d'impossible, et ne peuvent être infinies :
D'ailleurs quelques-unes peuvent être nulles sans inconvénient : De
sorte que la valeur de c_1 , qui est

$$c_1 = \frac{kb + k'b' + k''b'' + \dots + b^{(m-1)}}{Q(a_1)}$$

n'est ni infinie ni indéterminée : car son numérateur est connu,
et, comme $Q(a) = \frac{f(a)}{a-a_1}$, on a $Q(a_1) = f'(a_1)$, et, comme a_1 est
une racine simple de l'éq. (3), $Q(a_1)$ ne peut être nul.

D'ailleurs ce qu'on a dit de c_1 , se répéterait pour les autres c_m .
fauts.

Mais on voit que, si l'éq. (3) avait des racines égales,
on ne pourrait plus dire que l'on a l'intégrale générale de
la proposée.

Que faut-il donc faire dans ce cas, quand on a $a_1 = a_2$ par
exemple ? Même alors, une méthode ingénieuse, due à
d'Alembert, permet de trouver l'intégrale générale.

Supposons pour un instant que tous les coefficients de l'éq. (3)

$$(3) \quad a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U = 0$$

soient modifiés infiniment peu, de manière qu'il n'y ait plus

De racines égales, et qu'on ait

$$a_2 = a_1 + h$$

Les racines seront alors

$$a_1, a_1 + h, a_2, a_2 + h, \dots, a_m$$

et l'intégrale générale de la proposée

$$y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_1 + h x} + c_3 e^{a_2 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

mais supposons maintenant que h tende vers zéro, et si nous parvenons alors à trouver une limite vers laquelle tende l'intégrale, cette limite contenant m constantes, il est évident que ce sera l'intégrale générale de la proposée. — or, l'intégrale peut s'écrire

$$y = e^{a_1 x} (c_1 + c_2 e^{hx}) + \text{etc.}$$

$$y = e^{a_1 x} \left(c_1 + c_2 + \frac{c_2 h}{1} x + \frac{c_2^2 h^2}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \right) + \text{etc.}$$

Je puis poser $c_1 + c_2 = A$ et $c_2 h = B$, A et B étant deux nouvelles constantes entièrement arbitraires. alors il vient

$$y = e^{a_1 x} \left(A + Bx + \frac{B^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{B^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \right) + \text{etc.}$$

Ceci, quel que soit h , représente l'intégrale générale de l'éq. proposée, intégrale dans laquelle A et B , constantes arbitraires, ne conservent aucune espèce de relation avec h , et restent arbitraires quelques valeurs qu'on puisse attribuer à h . Si h tend vers zéro, il en est toujours de même, donc aussi à la limite. Donc l'intégrale générale de l'éq. proposée est alors

$$y = e^{a_1 x} (A + Bx) + c_3 e^{a_2 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

Si y avait trois racines égales, $a_1 = a_2 = a_3$, alors, on suppose les coefficients autres de manière à donner $a_3 = a_1 + h$. on retombe alors dans le cas de deux racines égales, on montre qu'il est

$$y = e^{a_1 x} (A + Bx) + c_3 e^{a_1 + h x} + c_4 e^{a_2 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

et, comme avant. à l'égard, si l'on suppose que h tend vers zéro, on trouvera

$$y = e^{a_1 x} (M + Nx + Hx^2) + c_4 e^{a_2 x} + \dots + c_m e^{a_m x}$$

et ainsi De suite, pour un nombre quelconque de Racines Égales.

Il peut arriver que l'Éq. (2) admette Des Racines Imaginaires, mais il n'y a là aucune espèce de difficulté Algébrique. Il est bon de voir comment on peut faire Disparaître les Imaginaires. — et, si l'on a

$$a_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

on aura une Racine Conjugnée

$$a_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

et deux racines donneront, dans l'Intégrale, les deux termes

$$e^{\alpha x} \left(c_1 e^{\beta x \sqrt{-1}} + c_2 e^{-\beta x \sqrt{-1}} \right)$$

ou

$$e^{\alpha x} \left\{ c_1 (\cos \beta x + \sqrt{-1} \sin \beta x) + c_2 (\cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x) \right\}$$

Si donc on pose $c_1 + c_2 = A$, $(c_1 - c_2)\sqrt{-1} = B$, A et B étant de nouvelles constantes, Réelles ou Imaginaires, il restera

$$e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

qu'on écrit ggf. sous une Des deux formes équivalentes:

$$M e^{\alpha x} \cos (\beta x + N)$$

$$M e^{\alpha x} \sin (\beta x + N)$$

M et N étant toujours Des constantes arbitraires.

Enfin, il peut y avoir Des Racines Imaginaires Égales, c'est-à-dire, chacune Des racines $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ peut entrer n fois dans l'Éq. (2). L'ensemble Des termes De l'intégrale qui correspond à ces racines s'écrira

$$e^{\alpha x} \left\{ e^{\beta x \sqrt{-1}} (A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^{n-1}) + e^{-\beta x \sqrt{-1}} (A' + B'x + C'x^2 + \dots + H'x^{n-1}) \right\}$$

ou bien

$$e^{\alpha x} \left\{ (\cos \beta x + \sqrt{-1} \sin \beta x) (A + Bx + \dots + Hx^{n-1}) + (\cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x) (A' + B'x + \dots + H'x^{n-1}) \right\}$$

ou bien enfin

$$e^{2\alpha} \left\{ \cos \beta x (M + N\alpha + R\alpha^2 + \dots + S\alpha^{n-1}) + \sin \beta x (M' + N'\alpha + R'\alpha^2 + \dots + S'\alpha^{n-1}) \right\}$$

$M, N, \dots, S, M', N', \dots, S'$ étant de nouvelles constantes, obtenues en posant

$$A + A' = M$$

$$(A - A')\sqrt{-1} = M'$$

$$B + B' = N$$

$$(B - B')\sqrt{-1} = N'$$

$$C + C' = R$$

$$\text{et } (C - C')\sqrt{-1} = R'$$

$$H + H' = S$$

$$(H - H')\sqrt{-1} = S'$$

Exemples.

Premier 1^{re} Eq. Linéaire Du Second ordre

$$(1) \frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = 0$$

Elle est à coefficients constants. L'Equation $a^2 - n^2 = 0$ me donne $a = \pm n$.
L'intégrale générale est donc

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$$

Si l'on avait l'Equation

$$(2) \frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0$$

On aurait eu $a^2 + n^2 = 0$, $a = \pm n\sqrt{-1}$, et pour l'intégrale

$$y = C_1 e^{n\sqrt{-1}x} + C_2 e^{-n\sqrt{-1}x}$$

ou

$$y = A \cos nx + B \sin nx$$

ce qu'on aurait pu d'ailleurs trouver directement en observant que l'Eq. $\frac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 y$ exige que l'on trouve une fonction se reproduisant, à un facteur près, par une double différentiation, et que les sinus et cosinus sont connus pour avoir de cette propriété.

Si maintenant les coefficients de l'Eq. linéaire sont second membres ne sont pas constants, rien de ce qui précède ne peut plus être appliqué. Il n'y a que des cas particuliers où l'intégration réussisse. Le plus remarquable est celui où l'on a l'Equation

$$(1) (ax+b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 (ax+b)^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_{m-1} (ax+b) \frac{dy}{dx} + A_m y = 0$$

on peut, par deux méthodes différentes, ramener cette Equation au cas des Equations linéaires à coefficients constants.

1^{re} Méthode. — Cherchons s'il est possible de trouver des valeurs

De y de la forme

$$y = (ax+b)^h$$

1.ère de la

$$\frac{dy}{dx} = ah(ax+b)^{h-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2h(h-1)(ax+b)^{h-2}$$

.....

Substituant dans l'équation (1)

$$h(h-1)\dots(h-m+1)a^m(ax+b)^h + A_1h(h-1)\dots(h-m+1)a^{m-1}(ax+b)^{h-1} + \dots + A_m(ax+b)^h = 0$$

est donc divisible par $(ax+b)^h$: et il reste une équation de la forme

$$h^m + Mh^{m-1} + Nh^{m-2} + \dots + Ph + S = 0$$

qui donnera m racines, $h_1, h_2, h_3, \dots, h_m$, et l'intégrale cherchée sera donc

$$y = c_1(ax+b)^{h_1} + c_2(ax+b)^{h_2} + \dots + c_m(ax+b)^{h_m}$$

2^e. Méthode. - Soient

$$ax+b = e$$

ou

$$adx = e^t dt$$

$$\frac{dt}{dx} = ae^{-t}$$

Maintenant, t est fonction de x . Donc nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = ae^{-t} \frac{dy}{dt}$$

De même

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = ae^{-t} \frac{d}{dt} \frac{dy}{dx} = ae^{-t} \frac{d}{dt} \left(ae^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = ae^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

(car une dérivée relative à x est toujours égale à une dérivée relative à t multipliée par ae^{-t}). - De même

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = ae^{-t} \frac{d}{dt} \left\{ ae^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right\} = ae^{-3t} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$\frac{d^m y}{dx^m} = ae^{-mt} \left(\frac{d^m y}{dt^m} + h \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + h \frac{dy}{dt} \right)$$

Il n'y a donc que des coefficients qui sont constants. Si donc on substitue dans l'éq. (1), comme, dans chaque terme, $\frac{d^p y}{dx^p}$ annule e^{-pt} , et $(ax+b)^p$ annule l'inverse e^{pt} , les variables disparaissent, et il reste une équation linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^m y}{dt^m} + M \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + N \frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} + \dots + S y = 0$$

on pourra donc

$$h^m + M h^{m-1} + N h^{m-2} + \dots + S = 0$$

Où m racines, $h_1, h_2, h_3, \dots, h_m$, et l'intégrale sera

$$y = C_1 e^{h_1 t} + C_2 e^{h_2 t} + \dots + C_m e^{h_m t}$$

or $t = \int (ax+b) dx$ et $h t = \int (ax+b)^h dx$. Donc il vient,

$$y = C_1 e^{\int (ax+b)^{h_1} dx} + C_2 e^{\int (ax+b)^{h_2} dx} + \dots + C_m e^{\int (ax+b)^{h_m} dx}$$

$$\text{ou } y = C_1 (ax+b)^{h_1} + C_2 (ax+b)^{h_2} + \dots + C_m (ax+b)^{h_m}$$

C'est là le résultat le plus remarquable auquel on soit parvenu dans le cas des coefficients variables.

Jusqu'ici, nous avons vu que l'éq. linéaire sans second membre a une intégrale qui peut se mettre sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m$$

Il est possible de démontrer que l'intégrale générale est nécessairement de cette forme-là.

Pour cela, j'appelle y , une solution sans constante, mais quelconque. D'ailleurs, de l'éq. donnée (si il y avait des constantes dans l'éq. (1), on la particulariserait). Supposons-nous de satisfaire à l'équation donnée par une valeur de y de la forme

$$y = C y_1$$

C étant une fonction inconnue de x : et il est évident d'ailleurs que $C y_1$ peut toujours être considérée comme représentant, quelle qu'elle soit, l'intégrale de la proposée. Remarquons que, puisque

y_1 est solution, on a évidemment

$$(2) \quad \frac{d^m y_1}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy_1}{dx} + Uy_1 = 0$$

et rappelons-nous l'égalité Symbolique du Calcul Différentiel

$$d^n(uv) = (du + dv)^n = u^n d^n v + n u^{n-1} du d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 u d^{n-2} v + \dots + v d^n u$$

en posant $d^0 u = u$ et $d^0 v = v$. Ici, $u = c$ et $v = y_1$. Donc

$$\frac{d^n(cy_1)}{dx^n} = c \frac{d^n y_1}{dx^n} + n \frac{dc}{dx} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 c}{dx^2} \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \dots$$

Prenez ainsi les coefficients de toutes les dérivées, et substituons-les dans l'éq. proposée. Le coefficient de c sera nul d'après l'éqn. (2), on retombera donc sur une éq. de la forme

$$\frac{d^m c}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} c}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} c}{dx^{m-2}} + \dots + U \frac{dc}{dx} = 0$$

qui nous permettra abaisser en posant $\frac{dc}{dx} = u$. alors, on a l'éq.

$$(2) \quad \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + P \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + U u = 0$$

Mais, puisque $\frac{dc}{dx} = u$, on a

$$c = \int u dx + c_1$$

Donc l'intégrale devient

$$(3) \quad y = c_1 y_1 + y_2 \int u dx$$

et ici, il est important de remarquer que, si l'on met pour u dans l'éq. (2) l'intégrale générale de l'éq. (2), on aura l'intégrale générale de la proposée (1). En effet, j'ai

$$\frac{y}{y_1} = c_1 + \int u dx$$

Donc

$$\frac{d\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx} = u \quad \left| \quad \frac{d^2\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx^2} = \frac{du}{dx} \quad \right| \quad \dots \quad \frac{d^{m-1}\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx^{m-1}} = \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}}$$

or, j'ai supposé u remplacé par l'intégrale générale de l'éq. (2). (Je suppose que, pour $x=a$, je puis disposer arbitrairement de u et de ses $(m-2)$ premières dérivées. Je pourrai donc disposer arbitrairement

Des $(m-1)$ premières Dérivées de $\frac{y}{y_1}$. D'ailleurs, à cause de C_1 , la fonction $\frac{y}{y_1}$ est elle-même arbitraire: Donc $\frac{y}{y_1}$ et ses $(m-1)$ premières Dérivées, par suite, y et ses $(m-1)$ premières Dérivées (puisque y_1 est une fonction déterminée), pourront être pris arbitrairement. Donc j'aurais bien l'intégrale générale de l'Eq. (1).

Cela pris, soit u , une solution de l'Eq. (2), sans constante. Je puis répéter sur cette Eq. (2) les mêmes raisonnements que j'ai faits sur l'Eq. (1): et j'en déduirai

$$(2) \quad u y = C_2 u_1 + \int z \, du$$

en posant

$$\frac{d\left(\frac{u}{u_1}\right)}{\frac{du}{u_1}} = z$$

et z dépendra d'une Eq. Linéaire de la forme

$$\frac{d^{m-1}z}{du^{m-1}} + P_1 \frac{d^{m-2}z}{du^{m-2}} + \dots + U_2 z = 0$$

Substituons la valeur de u dans celle de y . Je viendra, en posant

$$y_2 = y_1 \int u_1 \, du,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int \left(u_1 \int z \, du \right) du$$

et D'ailleurs y_2 est bien évidemment une solution particulière de l'Eq. (1), puisque $y_2 = y_1 \int u_1 \, du$, et que $y = y_1 \int u \, du + C_1$ est l'intégrale générale de la proposée.

on peut visiblement poursuivre ainsi les raisonnements jusqu'au bout. Donc l'intégrale de l'Eq. (1) est bien de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m$$

Corollaire. - Les Equations linéaires sans second membre n'ont jamais de solutions singulières.

En effet, en admettant que y_1 fût une solution singulière (sans constante), il est évident que je pourrais, dans la démonstration précédente, prendre cette solution pour point de départ, mes

$y = Cy_1$, l'intégrale générale $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$
 donc la solution proposée n'est plus alors qu'une intégrale particulière,
 l'on obtient en faisant $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = \dots = c_m = 0$.

II. Des Equations Linéaires avec Second membre.

Soit l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V.$$

Il y a d'abord un cas très simple à examiner, c'est celui où
 U et V sont constants. — alors, l'équation s'écrit :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + U \left(y - \frac{V}{U} \right) = 0$$

alors, en posant $y - \frac{V}{U} = z$, ce qui ne change rien aux dérivées, on a

$$\frac{d^m z}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dz}{dx} + Uz = 0$$

et l'on est ramené au cas d'une Eq. Linéaire sans Second membre.

Remarquons encore un cas assez étendu où l'on peut simplifier la question. — Toutes les fois que, d'une manière quelconque, on apercevra une solution $y = X$, il suffira qu'on ait

$$(2) \quad \frac{d^m X}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} X}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dX}{dx} + UX = V$$

alors, on trouve qu'à poser

$$y = X + z$$

on remarquant qu'en général on a

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{d^p X}{dx^p} + \frac{d^p z}{dx^p}$$

on substituera dans la proposée les valeurs du Second membre

qui y entrent, et, en ayant regard à la condition (2), on aura

$$\frac{d^m x}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} x}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dx}{dx} + Ux = 0$$

et l'on est ramené encore à une équation sans second membre.

Exemples. Supposons que, dans l'équation (1), les coefficients de l'éq. (1) soient constants, et que V soit une fonction entière de x , de la forme

$$V = Ax^p + Bx^{p-1} + \dots + Hx + K$$

De manière que l'éq. (1) devienne

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = Ax^p + Bx^{p-1} + \dots + Hx + K$$

on peut chercher une solution de l'éq. (1) sous la forme en posant

$$y = ax^p + bx^{p-1} + \dots + hx + k$$

a, b, \dots, h, k étant des coefficients qu'il s'agit de déterminer. Et en effet, par la substitution de y et de la dérivée dans le 1^{er} membre de l'éq. (1), celui-ci prendra la forme

$$ax^p + bx^{p-1} + \dots + hx + k$$

et, en identifiant ce polynôme avec le 2^e membre de l'éq. (1), on aura $(p+1)$ équations. D'où, généralement, il sera possible de tirer les $(p+1)$ coefficients inconnus a, b, \dots, h, k .

— on peut encore parler de même dans certains cas où V a une forme différentielle de la précédente. Supposons, par exemple

$$V = A \cos(nx+p) + B \sin(nx+p)$$

Comme les cosinus et sinus se reproduisent par la différentiation, nous chercherons pour y une valeur de la forme

$$y = a \cos(nx+p) + b \sin(nx+p)$$

Car, en substituant, le 1^{er} membre de la proposée prendra nécessairement la forme

$$f(a, b) \cdot \cos(nx+p) + f_1(a, b) \cdot \sin(nx+p)$$

on posera

$$A = f(a, b) \quad B = f_1(a, b)$$

et on tirera de là a et b .

— Si l'on avait simplement

$$V = A \cos(nx+p)$$

il faudrait encore chercher pour y une valeur de la forme $a \cos(nx+p) + b \sin(nx+p)$, c'est-à-dire

De quel sens, par la différentiation, donnent des sinus et des cosinus: si y est un cosinus, on le pourrait prendre simplement $y = a \cos(nx+p)$: c'est celui où la proposée se transformerait que des dérivées d'ordre pair.

— Supposons qu'elle ait

$$V = A e^{nx+p}$$

on pourrait chercher pour y une valeur de la forme

$$y = a e^{nx+p}$$

Exemple. — Soit l'éq.

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = e + e^{2x+1}$$

cherchons une solution de la forme

$$y = a + b e^{2x+1}$$

d'où

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a + 4b e^{2x+1}$$

Substituant et identifiant, on trouve

$$a - an^2 = 1 \quad 4b - bn^2 = 1$$

$$\text{d'où} \quad a = \frac{1}{1-n^2} \quad b = \frac{1}{4-n^2}$$

Donne une solution de l'éq. (1) et

$$y_1 = \frac{e^x}{1-n^2} + \frac{e^{2x+1}}{4-n^2}$$

Maintenant, posons

$$y = y_1 + z$$

Nous savons qu'il nous restera à intégrer l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - n^2 z = 0$$

qui donnera

$$z = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}$$

Donc l'intégrale générale de l'éq. (1) est

$$(1) \quad y = \frac{e^x}{1-n^2} + \frac{e^{2x+1}}{4-n^2} + c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}$$

Si $n \neq 2$, la valeur de y_1 est finie : c'est quela méthode est en défaut pour ce cas. Supposons, qd. nous De 2 que soit n , l'éq. (1) est l'intégrale générale. Appliquons à présent la même méthode pour le cas de $n=2$. Or, nous avons dans l'intégrale le terme $c_1 e^{nx}$ que nous pouvons tout aussi bien écrire $c_1 e^{n+1}$, ou bien encore $(c_1 - \frac{1}{4-n^2}) e^{n+1}$, ou encore $c_1 e^{n+1} - \frac{e^{n+1}}{4-n^2}$; l'intégrale devient alors

$$y = \frac{e^x}{1-n^2} + \frac{e^{2x+1}}{4-n^2} + c_1 e^{n+1} + c_2 e^{-n+1}$$

Le terme qui devient infini devient maintenant $\frac{e^{n+1}}{4-n^2}$ pour $n=2$. on n'a plus qu'à le traiter à la manière ordinaire. Le rapport du dérivé est $\frac{x e^{n+1}}{2n}$; et, pour $n=2$, il est $\frac{x e^{3+1}}{4}$; d'où, quelle intégrale devient alors

$$y = -\frac{1}{3} e^x + \frac{x e^{2x+1}}{4} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

on trouverait un exemple analogue dans l'éq.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = A \cos(px+q)$$

avec une discussion pour le cas de $p=n$.

Méthode De la Variation Des Constantes (Lagrange)...

Cette méthode a pour but et pour résultat de ramener dans tous les cas l'intégration d'une équation linéaire avec second membre à celle de la même équation sans second membre.

Prendons l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + p \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + U y = V$$

Supposons qu'ayant considéré à part l'équation

$$(2) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + p \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + U y = 0$$

on ait trouvé son intégrale générale

$$(3) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

Supposons que, dans cette Equation (3), les constantes $c_1, c_2 \dots c_m$ soient des fonctions de x , de manière que l'Eq. (2) devienne l'intégrale générale de l'Eq. (1). Nous donnant cette relation de condition entre ces m fonctions, nous pourrions nous en donner à volonté $(m-1)$ autres, que nous aurons soin de choisir de manière à rendre facile la détermination de ces fonctions. — Dans cela, nous différencierons $(m-1)$ fois l'Eq. (2), en égalant chaque fois à zéro les parties qui proviendraient de la variation des constantes: celles-ci n'interviendront dans les Eq. de condition que par leurs différentielles premières: nous les pourrions donc obtenir par de simples quadratures. Nous aurons donc ainsi:

$$dy = c_1 dy_1 + \dots + c_m dy_m$$

en posant

$$y, dc_1 + \dots + y_m dc_m = 0$$

de cette valeur de dy , je tirerais

$$d^2y = c_1 d^2y_1 + \dots + c_m d^2y_m$$

en posant

$$dy, dc_1 + \dots + dy_m dc_m = 0$$

et ainsi de suite. — J'aurais donc, pour mes $(m-1)$ Equations de condition

$$(A) \begin{cases} y, dc_1 + \dots + y_m dc_m = 0 \\ dy, dc_1 + \dots + dy_m dc_m = 0 \\ d^2y, dc_1 + \dots + d^2y_m dc_m = 0 \\ \dots \\ d^{m-2}y, dc_1 + \dots + d^{m-2}y_m dc_m = 0 \end{cases}$$

Après la dernière de ces Equations, j'aurais donc encore

$$d^{m-1}y = c_1 d^{m-1}y_1 + \dots + c_m d^{m-1}y_m$$

Mais de là, je tirerais pour $d^m y$ une valeur où je ne pourrais plus annuler les termes provenant de la variation des constantes: et cette valeur sera

$$d^m y = \begin{cases} c_1 d^m y_1 + \dots + c_m d^m y_m \\ + d^{m-1}y, dc_1 + \dots + d^{m-1}y_m dc_m \end{cases}$$

Maintenant, pour dernière condition, il reste à exprimer que l'Eq. (1) est vérifiée quand on y remplace par ses valeurs les divers coefficients différentiels qui y entrent. — or cette substitution me donnera

$$V = \left\{ \begin{array}{l} c_1 \left\{ \frac{d^m y_1}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \dots + U y_1 \right\} \\ + \dots \\ + c_m \left\{ \frac{d^m y_m}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + \dots + U y_m \right\} \\ + \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \dots + \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_m}{dx} \end{array} \right.$$

or maintenant, comme y_1, \dots, y_m sont des solutions de l'Eq. (2), il s'ensuit qu'il reste seulement, pour dernière condition

$$(B) \quad \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \dots + \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dc_m}{dx} = V$$

Il reste à trouver c_1, c_2, \dots, c_m . or, rien n'est plus aisé. Sans entrer dans aucun détail d'élimination, je vois que les $(m-1)$ équations (A) me donneront dc_2, dc_3, \dots, dc_m en fonction de dc_1 .

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} dc_2 = H_2 dc_1 \\ dc_3 = H_3 dc_1 \\ \vdots \\ dc_m = H_m dc_1 \end{array} \right.$$

Ces valeurs, reportées dans l'Eq. (B), donneront un résultat

$$\frac{dc_1}{dx} = X$$

Donc

$$c_1 = \int X dx + \alpha_1$$

et maintenant, les équations (2) me donneront

$$c_2 = \int H_2 X dx + \alpha_2, \quad c_3 = \int H_3 X dx + \alpha_3, \quad \dots \quad c_m = \int H_m X dx + \alpha_m$$

L'intégrale générale sera donc

$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m + \left\{ y_1 \int X dx + y_2 \int H_2 X dx + \dots + y_m \int H_m X dx \right\}$
 elle est de la forme

$$y - \pi(x) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m$$

et l'on voit bien ainsi que c'est l'intégrale Générale: car, par hypothèse, $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m$ étant l'intégrale Générale de l'équation sans second membre, on pourra donc prendre à volonté $y - \pi(x)$ et ses $(m-1)$ premières dérivées: D'où il suit que y et ses $(m-1)$ premières dérivées seront aussi arbitraires.

Si, dans V , tous les coefficients de la proposée sont constants, alors on peut effectuer les calculs. alors, en effet, a, a_1, a_2, \dots, a_m étant les racines de l'équation

$$a^m + P a^{m-1} + Q a^{m-2} + \dots + T a + U = 0$$

on a

$$y_1 = e^{a_1 x}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = a_1 e^{a_1 x}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = a_1^2 e^{a_1 x}$$

$$\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} = a_1^{m-1} e^{a_1 x}$$

et de même pour y_2, y_3, \dots, y_m . Les eq. (A) et (B) deviennent
 Donc alors

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} e^{a_1 x} \frac{dc_1}{dx} + \dots + e^{a_m x} \frac{dc_m}{dx} = 0 \\ a_1 e^{a_1 x} \frac{dc_1}{dx} + \dots + a_m e^{a_m x} \frac{dc_m}{dx} = 0 \\ a_1^2 e^{a_1 x} \frac{dc_1}{dx} + \dots + a_m^2 e^{a_m x} \frac{dc_m}{dx} = 0 \\ \dots \\ a_1^{m-1} e^{a_1 x} \frac{dc_1}{dx} + \dots + a_m^{m-1} e^{a_m x} \frac{dc_m}{dx} = 0 \\ a_1^{m-1} e^{a_1 x} \frac{dc_1}{dx} + \dots + a_m^{m-1} e^{a_m x} \frac{dc_m}{dx} = V \end{array} \right.$$

Ces Equations sont toutes semblables à celle-ci

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_m = b \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots = b' \\ a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \dots = b'' \\ \dots \\ a_1^{m-1} c_1 + \dots = b^{(m-1)} \end{cases}$$

que nous avons déjà traitées, et qui nous ont donné

$$c_1 = \frac{A b + A' b' + \dots + A^{(m-1)} b^{(m-1)}}{f'(a_1)}$$

en posant

$$f(a) = a^m + P a^{m-1} + \dots + T a + U = 0$$

Donc ici, si nous prenons $e^{a_1 x} \frac{dc_1}{dx}$ et les quantités semblables pour les inconnues, les Eq. (E) nous donneront les Valeurs très simples

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dx} = \frac{V e^{-a_1 x}}{f'(a_1)} \\ \frac{dc_2}{dx} = \frac{V e^{-a_2 x}}{f'(a_2)} \\ \dots \\ \frac{dc_m}{dx} = \frac{V e^{-a_m x}}{f'(a_m)} \end{cases}$$

On a évidemment l'Intégrale

$$y = d_1 e^{a_1 x} + d_2 e^{a_2 x} + \dots + d_m e^{a_m x} + \left\{ \frac{e^{a_1 x}}{f'(a_1)} \int V e^{-a_1 x} dx + \dots + \frac{e^{a_m x}}{f'(a_m)} \int V e^{-a_m x} dx \right\}$$

Revenons maintenant au cas Général.

Il pourrait se faire qu'on ne connût pas l'intégrale Générale de l'Eq. sous Second membre, mais seulement $(m-1)$ solutions particulières. — alors, partant de l'Intégrale $(m-1)^e$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{m-1} y_{m-1}$$

je ne pourrais plus me donner que $m-2$ relations entre les $(m-1)$ quantités c_1, c_2, \dots, c_{m-1} . Les eq. (A) deviendront donc

$$(A') \quad \begin{cases} y_1 dc_1 + \dots + y_{m-1} dc_{m-1} = 0 \\ dy_1 dc_1 + \dots + dy_{m-1} dc_{m-1} = 0 \\ d^2 y_1 dc_1 + \dots + d^2 y_{m-1} dc_{m-1} = 0 \\ \dots \\ d^{m-3} y_1 dc_1 + \dots + d^{m-3} y_{m-1} dc_{m-1} = 0 \end{cases}$$

La dernière me donnera encore

$$d^{m-2} y = c_1 d^{m-2} y_1 + \dots + c_{m-1} d^{m-2} y_{m-1}$$

valant de même forme que les précédentes. Mais les deux suivantes seront

$$d^{m-1} y = \begin{cases} c_1 d^{m-1} y_1 + \dots + c_{m-1} d^{m-1} y_{m-1} \\ + d^{m-2} y_1 dc_1 + \dots + d^{m-2} y_{m-1} dc_{m-1} \end{cases}$$

$$d^m y = \begin{cases} c_1 d^m y_1 + \dots + c_{m-1} d^m y_{m-1} \\ + 2 dc_1 d^{m-1} y_1 + \dots + 2 dc_{m-1} d^{m-1} y_{m-1} \\ + d^2 c_1 d^{m-2} y_1 + \dots + d^2 c_{m-1} d^{m-2} y_{m-1} \end{cases}$$

Reportant ces valeurs dans la proposée, c_1, c_2, \dots, c_{m-1} disparaîtront bien ~~et~~ encore. Mais pour les termes provenant de la 2^e ligne de $d^{m-1} y$, de la 2^e et la 3^e de $d^m y$, resteront, et nous aurons

$$(B') \quad \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} \cdot \frac{dc_1}{dx} + \text{etc.} + \left(2 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} \right) \frac{dc_1}{dx} + \text{etc.} = V.$$

en dérivant que les termes en y_1 et c_1 , les autres ne différant de ceux-là que par leurs indices. — Cette eq. (B') sera la $(m-1)^e$

De celles qui serviront à déterminer c_1, c_2, \dots, c_{m-1} . — Maintenant, les Eq. (A') me donneront toujours

$$(A') \quad \begin{cases} dc_2 = H_2 dc_1, \\ dc_3 = H_3 dc_1, \\ \vdots \\ dc_{m-1} = H_{m-1} dc_1. \end{cases}$$

et, en substituant, l'Eq. (B') prendra évidemment la forme

$$\frac{d^2 c_1}{dx^2} + M \frac{dc_1}{dx} = N$$

Où, en posant $\frac{dc_1}{dx} = z$

$$\frac{dz}{dx} + Mz = N$$

Equation linéaire du 1^{er} ordre que nous savons toujours intégrer, et qui donne

$$z = e^{-\int M dx} \left(\int e^{\int M dx} N dx + z \right)$$

Maintenant, on a

$$\begin{cases} c_1 = \int z dx + z, \\ c_2 = \int H_2 z dx + c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} = \int H_{m-1} z dx + c_{m-2} \end{cases}$$

Chaque de ces valeurs contient une constante, outre celle qui entre dans z ; en substituant, on aura donc bien m constantes dans l'intégrale générale.

Il est évident maintenant, et des calculs tout-à-fait semblables nous conduiraient à ce résultat, que si l'on connaît seulement $m-2$ solutions de l'Eq. sans second membre, on sera ramené à intégrer une équation linéaire du second ordre. — En général, connaissant $m-p$ solutions, on aura

à résoudre une équation linéaire d'ordre p .

Il est visible que ces raisonnements et ces calculs s'appliquent encore, en le simplifiant, au cas où $V=0$, De façon que la méthode de la variation des constantes donne un moyen de trouver l'intégrale générale d'une eq. linéaire sans second membre, quand on connaît $m-p$ solutions de cette équation, pourvu qu'on sache intégrer l'eq. linéaire d'ordre p .

En particulier, et comme exemple, prenons l'eq. linéaire du second ordre

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Q y = V$$

Supposons P et Q constants, V seulement fonction de x . - Nous aurons d'abord à considérer l'eq.

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Q y = 0$$

Pour trouver l'intégrale, nous posons

$$(3) \quad a^2 + Pa + Q = 0$$

d'où

$$\begin{cases} a = a_1 \\ a = a_2 \end{cases}$$

et l'intégrale de l'eq. (2) est

$$y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x}$$

Mais ne pourrions-nous ici nous donner qu'une équation entre C_1 et C_2 . C'est-à-dire

$$(A) \quad e^{a_1 x} \frac{dC_1}{dx} + e^{a_2 x} \frac{dC_2}{dx} = 0$$

alors, j'en déduis

$$dy = a_1 C_1 e^{a_1 x} + a_2 C_2 e^{a_2 x}$$

$$dy = a_1 C_1 e^{a_1 x} + a_2 C_2 e^{a_2 x} + a_1 e^{a_1 x} dC_1 + a_2 e^{a_2 x} dC_2$$

Substituant dans l'équation (1), j'obtiens

$$(B) \quad a_1 e^{a_1 x} \frac{dC_1}{dx} + a_2 e^{a_2 x} \frac{dC_2}{dx} = V$$

La eq. (A) et (B) me donnent, soit directement, soit par la formule tri-singulière qu'a été trouvée

$$e^{a_1 x} \frac{dC_1}{dx} = \frac{V}{a_1 - a_2} \quad e^{a_2 x} \frac{dC_2}{dx} = \frac{V}{a_2 - a_1}$$

d'où

$$C_1 = \int \frac{V e^{-a_1 x}}{a_1 - a_2} dx + C_1$$

ce qu'on peut écrire

$$C_1 = \frac{C_1 + \int V e^{-a_1 x} dx}{a_1 - a_2} \quad \text{et de même} \quad C_2 = \frac{C_2 + \int V e^{-a_2 x} dx}{a_2 - a_1}$$

l'intégrale est donc

$$(4) \quad y = \frac{e^{a_1 x} \int e^{-a_1 x} V dx - e^{a_2 x} \int e^{-a_2 x} V dx + C_1 e^{a_1 x} - C_2 e^{a_2 x}}{a_1 - a_2}$$

Ensuite, nous avons supposé a_1 différent de a_2 . C'est ce qui a été la condition que $y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x}$ soit l'intégrale générale de l'éq. (2). Si $a_1 = a_2$, on n'a plus qu'une intégrale particulière. alors, on retombe sur le m. de la variation des constantes. - on a

$$y = C_1 e^{a_1 x}$$

on n'a aucune condition arbitraire à poser. - on voit d'ici

$$\frac{dy}{dx} = C_1 a_1 e^{a_1 x} + e^{a_1 x} \frac{dC_1}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 a_1^2 e^{a_1 x} + 2a_1 e^{a_1 x} \frac{dC_1}{dx} + e^{a_1 x} \frac{d^2 C_1}{dx^2}$$

Substituant dans l'éq. (1), il vient

$$\frac{d^2 C_1}{dx^2} = e^{-a_1 x} V$$

Où

$$\frac{dC_1}{dx} = \int e^{-a_1 x} V dx + d_1, \quad C_1 = \int \left[d_1 + \int e^{-a_1 x} V dx \right] dx + d_2 = d_1 x + d_2 + \int dx \int e^{-a_1 x} V dx$$

on peut intégrer par parties,

$$C_1 = x \int e^{-a_1 x} V dx - \int x e^{-a_1 x} V dx + d_1 x + d_2$$

Appuyant dans $y = C_1 e^{a_1 x}$, on a, pour l'intégrale générale quand $a_1 = a_2$,

$$(5) \quad y = e^{a_1 x} \left(x \int e^{-a_1 x} V dx - \int x e^{-a_1 x} V dx \right) + e^{a_1 x} (d_1 x + d_2)$$

C'est là d'ailleurs identiquement le résultat qu'on aurait obtenu en employant d'abord la méthode de D'Alembert pour trouver l'intégrale générale de l'éq. (2), et passant de là, pour celle de Lagrange, à l'intégrale de l'éq. (1).

Mais maintenant, on pourrait se demander s'il y a moyen de dériver l'intégrale (5) directement de l'intégrale (4). - oui, et cela est facile: si nous ne l'avons pas indiqué en général, c'est uniquement à cause de la complication des calculs: mais si, il est aisé de le faire. Remarquons en effet que, quelque voisin de a_1 que soit a_2 , (4) est l'intégrale de (1), sans aucune impossibilité. on doit donc pouvoir dériver de (4) l'intégrale de l'intégrale pour le cas de $a_2 = a_1$. - or, pour $a_2 = a_1$, l'éq. (4) prend une forme impossible, à moins que C_2 n'ende vers C_1 , ou même l'inverse. donc, comme cette absurdité de l'éq. (4) ne peut subsister, il faut bien qu'il y ait quelque chose d'arbitraire. Mais devons donc considérer C_2 comme une fonction arbitraire sans doute, de a_2 , de telle façon, pour tant que $C_2 = C_1$ pour $a_2 = a_1$: c'est ce qui arrivera par exemple en supposant $C_2 = C_1 + (a_2 - a_1) \varphi(a_2)$, φ étant une fonction complètement arbitraire. - cela me f. entendu, y pourr. on, pour $a_2 = a_1$, la forme 0. Il n'y a plus rien là d'impossible. d'après la même valeur, et pour cela, prenons le rapport du dérivé de

Une forme pour y rapport à a_2 , c_2 étant considérée comme une fonction de a_2 .

Le rapport sera, comme la dérivée du dénominateur est -1 ,

$$x e^{a_2 x} \int e^{-a_2 x} V dx - e^{a_2 x} \int x e^{-a_2 x} V dx + c_2 e^{a_2 x} + e^{a_2 x} \frac{dc_2}{da_2}$$

et maintenant, pour $a_2 = a_1$, on a bien

$$y = e^{a_1 x} \left(x \int e^{-a_1 x} V dx - \int x e^{-a_1 x} V dx \right) + e^{a_1 x} (c_1 x + c_2)$$

et étant une constante arbitraire à laquelle se réduit $\frac{dc_2}{da_2}$ pour $a_2 = a_1$.

Car il est évident que, puisque c_2 étant une fonction arbitraire de a_2 , il en sera de même de $\frac{dc_2}{da_2}$, et, quand $a_2 = a_1$, on aura une fonction arbitraire d'une quantité constante, c'est-à-dire une constante arbitraire. — or maintenant, l'expression ci-dessus est bien l'intégrale (5).

Intégration des Equations Différentielles par les Séries.

Il y a deux procédés généraux pour l'intégration par séries. Le premier consiste dans l'emploi de la Série de Taylor, le Second, dans l'emploi de la Série de Maclaurin.

Pour la Série de Taylor, l'intégrale devient, pour $x = x_0$.

$$(1) \quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots$$

Si l'équation différentielle est d'ordre m , on prend arbitrairement $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$, et les dérivées suivantes se tirent de l'équation elle-même.

Pour des valeurs de x suffisamment voisines de x_0 , la série sera convergente: quelquefois même il arrivera qu'elle le sera pour toute valeur de x .

Quand la loi des termes sera assez simple, et qu'on pourra sommer la série, on aura l'intégrale sous forme finie. — Sinon, on ne l'aura plus qu'approximativement, et d'autant plus qu'on prendra un nombre plus considérable de termes.

La Série de Maclaurin donne, en faisant $x_0 = 0$ dans la précédente, et conservant pour abréger les mêmes notations en changeant leurs sens:

$$(2) \quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

Mais cette série est sujette à plus d'exceptions que celle de Taylor.

Pour que ces séries donnent bien réellement l'intégrale Générale, il faut évidemment que, dans le Résultat, il y ait le nombre de constantes nécessaires, et que par conséquent l'équation donnée ne fasse pas prendre à quelques unes des dérivées qu'on doit considérer comme arbitraires, des valeurs déterminées. — C'est pourtant ce qui arrive quelquefois, et alors les séries ne donnent plus que des Intégrales particulières.

Exemples.

1°: — Soit l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + ay + bx^2 = 0$$

On va à développer l'intégrale par la série de MacLaurin. Pour $x=0$, je puis prendre à volonté $y=y_0$. L'éq. (1) me donne alors

$$\frac{dy}{dx} = -ay - bx^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a \frac{dy}{dx} - 2bx = a^2y + abx^2 - 2bx,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^2 \frac{dy}{dx} + 2abx - 2b = -a^3y - abx^2 + 2abx - 2b, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = -a^4 \frac{dy}{dx} - 2abx + 2ab = a^5y + abx^2 - 2abx + 2ab$$

$$\text{On a} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -ay_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = a^2y_0, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = -a^3y_0 + 2b, \quad \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = a^4y_0 + 2ab$$

en faisant ainsi le calcul, on ne voit pas bien la suite du Résultat? Parions nous par autrement. L'éq. (1) me donne, en la différentiant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + 2bx = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a \frac{d^2y}{dx^2} + 2b = 0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} + a \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

etc.

On voit bien que les mêmes valeurs que tout à l'heure; seulement, on voit bien ici qu'on part de $\frac{d^2y}{dx^2}$, chaque coefficient différentiel s'obtient en multipliant le précédent par $-a$. Nous aurons donc pour l'intégrale

$$y = y_0 \left\{ 1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots \right\} - 2b \left\{ \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{ax^4}{1.2.3.4} + \frac{a^2x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right\}$$

la 1^{re} parentèse est le développement de e^{-ax} ; la seconde, multipliée par a^3 et changée de signe, donne $e^{-ax} - \left(1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2}\right)$. Donc

$$y = y_0 e^{-ax} + \frac{2b}{a^2} \left(e^{-ax} - 1 + ax - \frac{a^2 x^2}{1.2} \right)$$

et l'intégrale générale obtenue sous forme finie. En posant

$$y_0 + 2 \frac{b}{a^2} = C$$

on devient

$$y = C e^{-ax} - \frac{2b}{a^2} \left(\frac{a^2 x^2}{1.2} - ax + 1 \right)$$

Il est à remarquer que l'on trouverait en intégrant directement l'éq. (1) qui est linéaire et du 2^e ordre.

2°. Soit l'équation

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} + ay + bx^2 = 0$$

Quand $x=0$, cette eq. ne donne $y=0$, à moins que $\frac{dy}{dx}$ ne soit infini, ce que nous ne pouvons supposer. L'éq. (1) a donc une intégrale non développable pour la série de Maclaurin, et cette série ne donnera tout au plus qu'une intégrale particulière. Cherchons une solution particulière. — Posons le calcul. L'éq. (1) donne

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{a} \left| \frac{dy}{dx} + 2bx \right| = 0$$

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{2}{a} \left| \frac{d^2 y}{dx^2} + 2b \right| = 0$$

$$x \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{6}{a} \left| \frac{d^3 y}{dx^3} \right| = 0$$

à la fois est évidente; je tire de là

$$\text{pour } x=0: \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2b}{a+2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3}=0$$

et toutes les dérivées suivantes sont évidemment nulles. on a donc simplement, par la série de Maclaurin,

$$y = -\frac{bx^2}{a+2}$$

Quant à l'intégrale générale, on peut la trouver en posant $y = -\frac{bx^2}{a+2} + z$, on trouvera

$$y = Cx^{-a} - \frac{bx^2}{a+2}$$

3°. Soit l'équation

$$(1) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + n^2 xy = 0$$

Quand $x=0$, on voit qu'on peut prendre à volonté $y=y_0$, mais que $\frac{dy}{dx}$ est nécessairement nul. Donc on n'aura pas ainsi toute la généralité voulue. — Si l'on affecte les calculs, on verra facilement que

$$\left(\frac{d^{2k+1} y}{dx^{2k+1}} \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d^{2p} y}{dx^{2p}} \right)_0 = \pm \frac{n^p y}{2p+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ pour } p=2h \\ - \text{ pour } p=2h+1 \end{array} \right.$$

Après cela, nous aurons

$$y = y_0 \left\{ 1 - \frac{n^2 x^2}{1.2.3} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right\}$$

$$y = \frac{y_0}{n\alpha} \left\{ n\alpha x - \frac{n^3 x^3}{1.2.3} + \frac{n^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right\}$$

$$y = \frac{y_0}{n} \cdot \frac{\sin n\alpha x}{\alpha}$$

$$y = \frac{C \sin n\alpha x}{\alpha}$$

Ce résultat qui nous donne l'intégrale particulière de la forme $y = Cy_1$, on peut passer à l'intégrale générale par la méthode de la variation de la constante.

Nous avons

$$y = Cy_1, \quad y_1 = \frac{\sin n\alpha x}{\alpha}$$

Où nous cherchons (sans effectuer)

$$\frac{dy}{dx} = C \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C \frac{d^2 y_1}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dC}{dx} + y_1 \frac{d^2 C}{dx^2}$$

Substituant dans l'éq. (1), il vient

$$\alpha y_1 \frac{d^2 C}{dx^2} + 2\alpha \frac{dy_1}{dx} \frac{dC}{dx} = 0$$

en posant $\frac{dC}{dx} = u$, il vient

$$\alpha y_1 \frac{du}{dx} + 2\alpha \left(\alpha \frac{dy_1}{dx} + y_1 \right) u = 0$$

or $\alpha y_1 = \sin n\alpha x$, où $\alpha \frac{dy_1}{dx} + y_1 = n \cos n\alpha x$. Donc il reste

$$-\frac{du}{u} = \frac{2n \cos n\alpha x dx}{\sin n\alpha x} = 2 \frac{d(\sin n\alpha x)}{\sin n\alpha x}$$

$$\int u = \int \left(\frac{2}{\sin n\alpha x} \right)^{-2} + \int C_1$$

$$u = \frac{C_1}{\sin^2 n\alpha x}$$

Donc

$$C = C_1 \int \frac{dx}{\sin^2 n\alpha x} + C_2 = C_1 \cot n\alpha x + C_2$$

Nous l'intégrale générale est

$$y = \frac{A \sin n\alpha x + B \cos n\alpha x}{\alpha}$$

Cette eq. (1) aurait pu s'intégrer directement par un artifice de calcul, en posant

$$\alpha y = u$$

On a

$$\alpha \frac{dy}{dx} + y = \frac{du}{dx}$$

$$\alpha \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Reportant cette dernière valeur dans l'eq. (1), elle devient

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + n^2 u = 0$$

Or on connaît l'intégrale

$$u = A \cos nx + B \sin nx$$

on

$$y = \frac{A \cos nx + B \sin nx}{x}$$

c'est ce qu'on avait trouvé autrement.

Equations Linéaires Simultanées.

Prevenons d'abord Des Equations Sans Second membre et
Du 1^{er} degré ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P y + Q z + R u &= 0 \\ \frac{dz}{dx} + P' y + Q' z + R' u &= 0 \\ \frac{du}{dx} + P'' y + Q'' z + R'' u &= 0 \end{aligned} \right\}$$

et Supposons les Coefficients constants. on peut encore ici
chercher pour y, z, u Des Valeurs De la forme e^{mx} . Car,
si l'on pose

$$y = e^{mx} \quad z = \mu e^{mx} \quad u = \nu e^{mx}$$

si l'on Différencie et si l'on Substitue, les exponentielles Dispa-
raissent, et il reste trois Equations entre trois Inconnues
 μ, ν et m : ce sera

$$\left. \begin{aligned} m + P + Q\mu + R\nu &= 0 \\ P' + (m + Q')\mu + R'\nu &= 0 \\ P'' + Q''\mu + (m + R'')\nu &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ces trois Equations Déterminent μ, ν , et m . Supposons que
Du Deux Dernières on tire μ et ν . on aura pour ces Incon-
nues Des valeurs fractionnaires dont le Dénominateur contiendra
 m^2 . Donc on arrivera à une Equation en m Du 3^e Degré.

Il y aura donc pour m trois valeurs, réelles ou imaginaires, m_1, m_2, m_3 , et des valeurs correspondantes de μ et ν , c'est-à-dire μ_1 et ν_1 , μ_2 et ν_2 , μ_3 et ν_3 . Nous avons trois systèmes de solutions particulières

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^{m_1 x} \\ z_1 = \mu_1 e^{m_1 x} \\ u_1 = \nu_1 e^{m_1 x} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y_2 = e^{m_2 x} \\ z_2 = \mu_2 e^{m_2 x} \\ u_2 = \nu_2 e^{m_2 x} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y_3 = e^{m_3 x} \\ z_3 = \mu_3 e^{m_3 x} \\ u_3 = \nu_3 e^{m_3 x} \end{array} \right\}$$

et alors, les trois intégrales générales sont

$$\left\{ \begin{array}{l} y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \\ z = C_1 \mu_1 e^{m_1 x} + C_2 \mu_2 e^{m_2 x} + C_3 \mu_3 e^{m_3 x} \\ u = C_1 \nu_1 e^{m_1 x} + C_2 \nu_2 e^{m_2 x} + C_3 \nu_3 e^{m_3 x} \end{array} \right.$$

Si les coefficients ne sont pas constants, il n'y a pas de procédé général d'intégration.

Prenez le cas général, où les seconds membres ne sont pas nuls :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} + P y + Q z + R u = V \\ \frac{dz}{dx} + P' y + Q' z + R' u = V' \\ \frac{du}{dx} + P'' y + Q'' z + R'' u = V'' \end{array} \right.$$

on peut encore employer la méthode de la Variation des Constantes.

Supposons qu'on ait pu intégrer les équations sans second membre, et qu'on ait eu

$$(2) \quad \begin{cases} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \\ u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \end{cases}$$

Opérons à déterminer c_1, c_2, c_3 . Demander quelques valeurs (2) satisfassent les équations (1). Elles n'ont au nombre de trois: Donc nous ne pouvons nous donner aucune condition arbitraire. - Différentions les eq. (2): il viendra:

$$\begin{cases} dy = c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_3 dy_3 + y_1 dc_1 + y_2 dc_2 + y_3 dc_3 \\ dz = c_1 dz_1 + c_2 dz_2 + c_3 dz_3 + z_1 dc_1 + z_2 dc_2 + z_3 dc_3 \\ du = c_1 du_1 + c_2 du_2 + c_3 du_3 + u_1 dc_1 + u_2 dc_2 + u_3 dc_3 \end{cases}$$

Substituant dans les équations (1), on voit facilement qu'il reste:

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} + y_3 \frac{dc_3}{dx} = V \\ z_1 \frac{dc_1}{dx} + z_2 \frac{dc_2}{dx} + z_3 \frac{dc_3}{dx} = V' \\ u_1 \frac{dc_1}{dx} + u_2 \frac{dc_2}{dx} + u_3 \frac{dc_3}{dx} = V'' \end{cases}$$

Ces équations serviront à trouver c_1, c_2, c_3 : et ces eq. ne seront pas incompatibles. Car, puisque les eq. (2) sont les intégrales générales des eq. (1) privées de second membre, il s'ensuit que, dans ces intégrales (2), on peut, pour x quelconque, prendre arbitrairement y, z, u et trouver sans impossibilité les trois constantes. Or, si l'on compare les eq. (2) avec les eq. (3), on voit qu'il n'y a de différence qu'en ce que les seconds membres de celles-ci, au lieu d'être y, z, u , sont

sont V , V' et V'' . Donc les eq. (3) ne sont pas incompatibles si les eq. (2) ne le sont pas. — on pourra donc résoudre les eq. et en tirer

$$\frac{dc_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dc_2}{dx} = X_2, \quad \frac{dc_3}{dx} = X_3$$

Où

$$c_1 = \int X_1 dx + \alpha_1, \quad c_2 = \int X_2 dx + \alpha_2, \quad c_3 = \int X_3 dx + \alpha_3$$

Substituant dans les équations (1), on aura les intégrales générales du système (1).

D'Alembert a donné une autre méthode, qui n'exige pas qu'on sache trouver les intégrales des équations sous second membre. Elle repose sur l'emploi d'indéterminées qui ont pour effet de séparer les variables.

Reprenons les équations générales :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + P y + Q z + R u = V \\ \frac{dz}{dx} + P' y + Q' z + R' u = V' \\ \frac{du}{dx} + P'' y + Q'' z + R'' u = V'' \end{cases}$$

Multiplications la seconde par θ , la 3^e par θ' et ajoutons : on aura

$$\frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} + \theta' \frac{du}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta') y + (Q + Q'\theta + Q''\theta') z + (R + R'\theta + R''\theta') u = V + V'\theta + V''\theta'$$

Si θ et θ' étaient constants, les trois premiers termes seraient la dérivée de $y + \theta z + \theta' u$: sinon, ils n'en seraient qu'une partie. Posons

$$y + \theta z + \theta' u = t$$

$$y + \theta x + \theta' u = t$$

9¹ cas

$$\frac{dy}{dx} + \theta \frac{dx}{dx} + \theta' \frac{du}{dx} = \frac{dt}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} - u \frac{d\theta'}{dx}$$

9¹ autres

$$y = t - \theta x - \theta' u$$

Si l'on reporte dans l'éq. précédente, on en aura une autre

$$\frac{dt}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} - u \frac{d\theta'}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')(t - \theta x - \theta' u) + (Q + Q'\theta + Q''\theta')z + (R + R'\theta + R''\theta')u = V + V'\theta + V''\theta'$$

Dont y ne fait plus partie.

Maintenant, on peut supposer θ et θ' de manière à annuler les coefficients de z et de u . Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{d\theta}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0$$

$$\frac{d\theta'}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta') = 0$$

et alors, l'éq. précédente se réduit à

$$\frac{dt}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')t = V + V'\theta + V''\theta'$$

Mais nous avons donc à résoudre ces trois dernières équations.

Les deux premières ne contiennent plus que θ et θ' simultanément avec x (de façon que si l'on n'avait en que deux variables, la séparation serait effectuée). Mais ces eq. ne sont pas

linéaires, et l'on ne fait pas les intégrer en général. Or, cela n'est pas nécessaire. — Soient seulement θ , et θ' , deux valeurs qui satisfassent aux deux premières équations. Si j'en reporte dans la 3^e en t , j'aurai une eq. linéaire et du 1^{er} ordre en t ; donc elle s'intégrera.

Cette équation est, en posant $P + P'\theta + P''\theta' = -m$ et $V + V'\theta + V''\theta' = T$

9¹ cas

$$\frac{dt}{dx} - m t = T$$

$$t = e^{\int m dx} \left(\int e^{-\int m dx} T dx + C \right)$$

En 2¹ cas de ces eq. montrant qu'on n'est pas en mesure de prendre θ et θ' constants: car leurs valeurs sont fonctions de P, P', Q, Q', R, R' , et de θ, θ' qui contiennent x , à moins que les eq. (1) n'aient leurs coefficients constants.

or θ , et θ' , ne sont que des valeurs particulières de θ et θ' .
on n'a donc aussi qu'une valeur particulière de t , et l'on
sait écrire

$$t_1 = e^{\int m, dx} \left(\int e^{-\int m, dx} T_1, dx + C_1 \right)$$

1^{re} Non connaît deux autres groupes (θ_2, θ'_2) et (θ_3, θ'_3) on
en déduira t_2 et t_3 , d'où

$$\begin{cases} y + \theta_1 z + \theta'_1 u = t_1 \\ y + \theta_2 z + \theta'_2 u = t_2 \\ y + \theta_3 z + \theta'_3 u = t_3 \end{cases}$$

en résolvant ces trois équations, on en tirera y , z et u ,
et le problème sera résolu.

Mais tout cela suppose qu'on sache trouver trois couples
de valeurs pour θ et θ' . — Si les coefficients des équations
données sont constants, on le pourra. alors en effet, on peut
supposer que θ et θ' sont constants. alors, $\frac{d\theta}{dx}$ et $\frac{d\theta'}{dx}$ s'en
vont, et l'on peut trouver θ et θ' . En effet, nous avons
puisi

$$T + P'\theta + P''\theta' = -m$$

ou

$$T + P'\theta + P''\theta' + m = 0$$

alors, les deux équations en θ et θ' deviennent

$$(m + Q')\theta + Q''\theta' + Q = 0$$

$$(m + R'')\theta' + R'\theta + R = 0$$

Cela fait 3 Eq. en θ , θ' et m . Les deux dernières sont du
1^{er} degré en θ et θ' ; si on tire leurs valeurs et qu'on les
reporte dans la 1^{re}, on aura une équation du 3^e degré en m .

Opérons. Des trois valeurs correspondantes de m , étant reportées à son tour dans les deux dernières, donnera un groupe de valeurs de θ et θ' . — L'intégration s'achève aisément.

Particularisons: — Supposons qu'il n'y ait que deux fonctions, et que les équations soient

$$h) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + P y + Q z = V \\ \frac{dz}{dx} + P' y + Q' z = V' \end{cases}$$

Multiplicons la seconde par θ , ajoutons, et posons

$$y + \theta z = t$$

il vient

$$\frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx} - z \frac{d\theta}{dx}$$

il viendra

$$\frac{dt}{dx} - m t = T$$

en supposant

$$P + P'\theta = -m$$

$$V + V'\theta = T$$

et avec l'éq. de condition obtenue en égalant à zéro le coeff. de z :

$$\frac{d\theta}{dx} + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) = 0$$

Il suffit de trouver deux valeurs, θ_1 et θ_2 , qui satisfassent cette équation.

Si les coefficients sont constants, l'éq. en θ devient

$$(P + P'\theta)\theta - Q - Q'\theta = 0$$

elle est du 2^e degré, et fournit les deux valeurs θ_1 et θ_2 .

Si elles étaient égales, on emploierait la méthode générale, et l'on trouverait aisément les valeurs limites de y et z .

on peut faire autrement? d'l'eq. en θ peut alors s'écrire

$$P'(\theta - \theta_1)^2 = 0$$

alors, l'eq. générale en θ , où l'on ne suppose pas θ constant, devient

$$\frac{d\theta}{dx} + P'(\theta - \theta_1)^2 = 0$$

or on sait intégrer. Car cette équation s'écrira

$$-\frac{d\theta}{(\theta - \theta_1)^2} = P' dx$$

Donc

$$\frac{1}{\theta - \theta_1} = C + P'x$$

$$\theta = \theta_1 + \frac{1}{C + P'x}$$

Mais maintenant, nous n'avons besoin que de deux valeurs de θ . Prenons $C = 0$ et $C = \infty$, nous avons

$$\theta = \theta_1 \quad \text{et} \quad \theta = \theta_1 + \frac{1}{P'x}$$

et il ne reste plus qu'à suivre la méthode générale.

Enfin, si les racines de l'eq. en θ sont imaginaires, on peut faire disparaître le signe $\sqrt{-1}$. Les deux racines étant $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, on aura en général:

$$\frac{d\theta}{dx} + P' \{ (\theta - \alpha)^2 + \beta^2 \} = 0$$

Intégrons

$$\frac{d\theta}{(\theta - \alpha)^2 + \beta^2} = -P' dx$$

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\frac{d\theta}{\beta}}{1 + \left(\frac{\theta - \alpha}{\beta}\right)^2} = -P' dx$$

$$\text{car } \int \frac{\theta - \alpha}{\beta} = (C - P'x)\beta$$

Donc

$$\theta - \alpha = \beta \operatorname{tg} \cdot \beta (c - P'x)$$

Pour avoir deux valeurs particulières, nous posons $\beta c = 0$

et $\beta c = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha - \beta \operatorname{tg} P'x \\ \theta_2 = \alpha + \beta \cot P'x \end{cases}$$

et la méthode s'achève aisément.

Exemple. - Prenons les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} + gy - 2x = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} - 6x + y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = q(t) \end{cases}$$

Commençons par les ramener au 1^{er} ordre. Posons

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x' \\ \text{alors on a} \quad x' - 2 \frac{dy}{dt} + gy - 2x &= 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{dx'}{dt} + 5x' - 6x + y &= q(t) \end{aligned} \right\}$$

Résolvant par rapport aux dérivées

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x' = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2}x' - \frac{g}{2}y + x = 0 \\ \frac{dx'}{dt} - \frac{g}{2}x' - \frac{g}{2}y + 7x = -q(t) \end{cases}$$

Maintenant, la méthode de D'Alembert s'applique. Je pose

$$x + \theta y + \theta' x' = z$$

et je ramène le problème au calcul de z . - on posera aussi

$$\theta + 7\theta' = m$$

on trouve d'ailleurs

$$\theta = \frac{11}{2m^2 + 20m + 44} \quad \theta' = -\frac{2m+9}{2m^2 + 20m + 44}$$

Appliquant dans la précédente, on a

$$2m^3 + 20m^2 + 94m + 92 = 0$$

qui a une racine entière

$$m_1 = -2$$

et deux irrationnelles

$$m_2, m_3 = -4 \pm \sqrt{3}$$

le calcul s'achève.

on a en effet à intégrer une eq. linéaire en z

$$\frac{dz}{dt} + mz = -\theta' q(t)$$

Ce qu'on sait faire.

Enfin, il est bien à remarquer que les Equations Linéaires peuvent s'intégrer par la méthode de la variation des constantes sans qu'il soit besoin de les ramener au 1^{er} ordre.

Reprenons celles de l'exemple précédent :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} + y - 2x = 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} - 6x + y = q(t) \end{cases}$$

Lissons les Equations telles qu'elles sont : - et, supposant pour un instant les seconds membres nuls, cherchons des solutions de la forme

$$x = e^{mt} \quad y = \mu e^{mt}$$

Il est évident que la méthode connue s'applique si, on trouve

$$\mu = \frac{m^2 - 5m + 6}{1+m}$$

avec

$$(m-2)(1+m) - (2m-4)(m^2-5m+6) = 0$$

Cette dernière Eq. est du 3^e. Degré. C'est la même qu'on avait trait. à l'Algèbre, seulement, on voit que $m=2$ est racine. Les deux autres sont $m_2 = 4 + \sqrt{3}$, $m_3 = 4 - \sqrt{3}$.

on a donc

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{m_2 t} + c_3 e^{m_3 t} \\ y = c_1 \mu_1 e^{2t} + c_2 \mu_2 e^{m_2 t} + c_3 \mu_3 e^{m_3 t} \end{cases}$$

Ce sont là les Intégrales Des Equations sans second membre.
 alors, on emploie la méthode De la Variation Des Constantes, et
 ici on peut le donner une condition, qui sera par exemple

$$e^{2t} dc_1 + e^{m_1 t} dc_2 + e^{m_2 t} dc_3 = 0$$

on aura avec cela ~~de~~ deux équations, on pourra donc
 trouver les trois Inconnues c_1, c_2, c_3 .

Equations aux

Différences Partielles.

Commençons par quelques préliminaires sur l'origine de ces Equations.

Quand on a une Equation

$$f(x, y, z) = 0$$

contenant un paramètre c , on sait qu'on peut l'éliminer. L'eq. qu'on obtient alors est une Eq. aux différences partielles.

Si l'on a

$$(1) \quad f\{x, y, z, \varphi(z)\} = 0$$

z étant de la forme

$$z = V(x, y, z)$$

on peut éliminer complètement la fonction φ . — Cette Eq. (1), pour une valeur donnée de φ , représente une surface: et, quand φ varie, on a une série de surfaces, ayant pour caractéristique commune que z reste le même pour toutes.

Cette Eq. (1) est d'ailleurs de la forme

$$\beta = \varphi(z) \quad \text{si} \quad \beta = \chi(x, y, z)$$

c.à d.

$$\chi(x, y, z) = \varphi\{V(x, y, z)\}$$

Qu'on élimine l'Eq. (1) — et l'on voit qu'on peut éliminer φ .

En effet, en différenciant par rapport à x et y successivement,
et posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, on aura

$$\frac{df}{dx} + p \frac{df}{dz} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dz} \left\{ \frac{dz}{dx} + p \frac{dz}{dz} \right\} = 0$$

$$\frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{dz} \left\{ \frac{dz}{dy} + q \frac{dz}{dz} \right\} = 0$$

Ces deux équations et l'éq. (1) contiennent q et $\frac{dq}{dz}$. On pourra les éliminer, et l'on aura une équation du 4th ordre, où p et q entreront à de certaines puissances.

Si l'équation avait été résolue par rapport à q :

$$\beta = q(z) \quad \begin{cases} z = \mathcal{V}(x, y, z) \\ \text{ou } \mathcal{X}(x, y, z) \end{cases}$$

Le calcul serait simplifié. Car, en différenciant, on a

$$\frac{d\beta}{dx} + p \frac{d\beta}{dz} = \frac{dq}{dz} \left\{ \frac{dz}{dx} + p \frac{dz}{dz} \right\}$$

$$\frac{d\beta}{dy} + q \frac{d\beta}{dz} = \frac{dq}{dz} \left\{ \frac{dz}{dy} + q \frac{dz}{dz} \right\}$$

Ces équations ne contiennent plus q : Divisons membre à membre, $\frac{dq}{dz}$ disparaît, et l'on aura

$$\left\{ \frac{d\beta}{dx} + p \frac{d\beta}{dz} \right\} \left\{ \frac{dz}{dy} + q \frac{dz}{dz} \right\} - \left\{ \frac{d\beta}{dy} + q \frac{d\beta}{dz} \right\} \left\{ \frac{dz}{dx} + p \frac{dz}{dz} \right\} = 0$$

On peut simplifier: les termes en pq disparaissent, et il reste

$$p \left\{ \frac{d\beta}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d\beta}{dy} \right\} + q \left\{ \frac{d\beta}{dx} \cdot \frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz} \cdot \frac{d\beta}{dz} \right\} = \frac{d\beta}{dy} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{d\beta}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}$$

Équation de la forme

$$Pp + Qq = R \quad (2)$$

P , Q , R étant des fonctions données de x , y et z , ne contenant ni p ni q . — on s'appelle équation aux

Différences Partielles (mieux : aux Différentielles ou aux Dérivées partielles).

Cette équation exprime une propriété du plan Tangent aux Surfaces que représente l'Eq. (1).

Supposons maintenant qu'on ait

$$f(x, y, z, q(x), \psi(y)) = 0$$

q et ψ étant deux fonctions arbitraires, z et ψ deux fonctions déterminées de x , y et z . à quel ordre faudra-t-il Descendre pour éliminer q et ψ ? Nous avons une équation, et deux inconnues q et ψ . Différentions en x et y : nous aurons deux équations de plus, et deux inconnues nouvelles, $\frac{dq}{dx}$ et $\frac{d\psi}{dy}$. En descendant au second ordre, on aura trois équations de plus, et deux inconnues, $\frac{d^2q}{dx^2}$ et $\frac{d^2\psi}{dy^2}$; six équations et six inconnues. En arrivant au 3^e. ordre, on aura 4 Eq. de plus, et seulement deux inconnues, $\frac{d^3q}{dx^3}$ et $\frac{d^3\psi}{dy^3}$; en tout 10 équations et 8 inconnues. ainsi, en descendant au 3^e. ordre, on pourra éliminer les deux fonctions, mais en général, il ne suffit pas de s'arrêter au second.

Si par exemple on avait

$$z = q(x+ay) + \psi(x-ay)$$

il suffirait de descendre au second ordre. Car, en différenciant, on a

$$\frac{dz}{dx} = q'(x+ay) + \psi'(x-ay) \quad \frac{dz}{dy} = a\{q'(x+ay) - \psi'(x-ay)\}$$

différenciant encore

$$\frac{d^2z}{dx^2} = q''(x+ay) + \psi''(x-ay) \quad \frac{d^2z}{dy^2} = a^2\{q''(x+ay) + \psi''(x-ay)\}$$

Donc

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2}$$

il a suffi de descendre au 2^e. ordre.

En général, supposons qu'on ait n fonctions arbitraires. — Supposons qu'on différencie x fois, nous aurons $n + nx$ ou $n(x+1)$ inconnues, et $1+2+3+4+\dots+(x+1)$ ou $\frac{(x+1)(x+2)}{2}$ Equations. Donc il faut que l'on ait

$$\frac{(x+1)(x+2)}{2} > n(x+1)$$

$$x+2 > 2n$$

$$x > 2n-2$$

Donc en général, il suffira de différencier $2n-1$ fois.

Il peut arriver qu'on ait besoin d'un moins grand nombre de différentiations. ainsi, soit

$$f\{x, y, z, \varphi(x), \psi(\beta), \pi(\gamma), \dots\} = 0$$

si α, β, γ ne renferment pas x , il est clair qu'en différentiant par rapport à x , on n'introduit pas de nouvelle inconnue: il suffira donc de différencier n fois par rapport à x seulement.

Si l'on donnait

$$y = \varphi(\alpha, \beta)$$

il ne serait pas possible d'éliminer φ , parce que chaque différentiation introduirait autant d'inconnues que d'équations.

Supposons maintenant qu'il y ait trois variables indépendantes, x, y, z , et que u soit la fonction.

Je dis que si l'on a

$$y = \varphi(\alpha, \beta)$$

(et si l'on avait $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ c'est la même chose) — on peut éliminer φ .

En effet, en différentiant, on aura:

$$\frac{dy}{dx} + p \frac{dy}{du} = \frac{dq}{dx} \left(\frac{dx}{dx} + p \frac{dx}{du} \right) + \frac{dq}{d\beta} \left(\frac{d\beta}{dx} + p \frac{d\beta}{du} \right)$$

Eq. de la forme

$$A \frac{dq}{dx} + B \frac{dq}{d\beta} + C = 0$$

De même

$$A' \frac{dq}{dx} + B' \frac{dq}{d\beta} + C' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = p \\ \frac{du}{dy} = q \\ \frac{du}{dz} = r \end{array} \right.$$

en différenciant par rapport à y .

ensuite, si l'on différencie par rapport à z :

$$A'' \frac{dq}{dx} + B'' \frac{dq}{d\beta} + C'' = 0$$

entre ces trois équations, on pourra éliminer $\frac{dq}{dx}$ et $\frac{dq}{d\beta}$, et l'on arrivera encore à une équation linéaire, de la forme

$$Pp + Qq + Rr = V$$

En général, si l'on a une fonction q portant sur n fonctions déterminées

$$q(x, \beta, \gamma, \dots, \lambda) = 0$$

et s'il y a autant de variables indépendantes que de fonctions, on pourra éliminer q en descendant seulement au 1^{er} ordre.

application. — Soit u une fonction homogène d' x, y et z . on pourra écrire

$$u = x^m q\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

Je pose $\frac{y}{x} = \alpha$, $\frac{z}{x} = \beta$: alors

$$u = x^m q(\alpha, \beta)$$

éliminons q . En différenciant

$$\frac{du}{dx} = m x^{m-1} q - y x^{m-2} \frac{dq}{d\alpha} - z x^{m-2} \frac{dq}{d\beta}$$

$$\frac{du}{dy} = x^{m-1} \frac{dq}{d\alpha}$$

$$\frac{du}{dz} = x^{m-1} \frac{dq}{d\beta}$$

éliminons q , $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dz}$ en nous servant de ces 3 équations et de $u = x^m \varphi(x, y, z)$.

Il vient

$$x \frac{du}{dx} = m u - y \frac{du}{dy} - z \frac{du}{dz}$$

ou

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = m u$$

c'est la propriété générale des fonctions homogènes.

Passons à l'Intégration des équations aux différentielles partielles.

Soit d'abord

$$Pp + Qq + Rr = V \quad (1)$$

où entrent x, y, z et u , et où

$$p = \frac{du}{dx}, \quad q = \frac{du}{dy}, \quad r = \frac{du}{dz}$$

Représentons par

$$f(x, y, z, u) = 0 \quad (2)$$

l'intégrale inconnue. — Différencions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dx} + p \frac{df}{du} = 0 \\ \frac{df}{dy} + q \frac{df}{du} = 0 \\ \frac{df}{dz} + r \frac{df}{du} = 0 \end{array} \right.$$

Enant de là p, q, r et reportant dans l'éq. (1), on a

$$P \frac{df}{dx} + Q \frac{df}{dy} + R \frac{df}{dz} + V \frac{df}{du} = 0 \quad (2)$$

et cette eq. (2) devra être vérifiée identiquement, au moins quand on aura tiré u de l'éq. (2) pour le porter dans (2) : car, sans cela, il y aurait une relation entre les variables indépendantes x, y, z . Cette condition est donc évidemment nécessaire & suffisante.

Cela posé, reportons-nous aux Equations Simultanées. lorsque l'on a

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{V}$$

on voit que ces Eq. comportent 3 Intégrales

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = c \\ \psi(x, y, z, u) = c' \\ \pi(x, y, z, u) = c'' \end{cases}$$

où il n'y a qu'une seule variable indépendante, et pour exemple, et chacune des fonctions φ, ψ, π vérifie identiquement l'équation

$$P \frac{d\varphi}{dx} + Q \frac{d\varphi}{dy} + R \frac{d\varphi}{dz} + V \frac{d\varphi}{du} = 0$$

De plus, j'ai vu que toute fonction λ de φ, ψ et π jouit de la même propriété, c.à.d. qu'on a identiquement

$$P \frac{d\lambda}{dx} + Q \frac{d\lambda}{dy} + R \frac{d\lambda}{dz} + V \frac{d\lambda}{du} = 0$$

En effet, on a

$$\begin{cases} P \frac{d\varphi}{dx} + Q \frac{d\varphi}{dy} + R \frac{d\varphi}{dz} + V \frac{d\varphi}{du} = 0 \\ P \frac{d\psi}{dx} + Q \frac{d\psi}{dy} + R \frac{d\psi}{dz} + V \frac{d\psi}{du} = 0 \\ P \frac{d\pi}{dx} + Q \frac{d\pi}{dy} + R \frac{d\pi}{dz} + V \frac{d\pi}{du} = 0 \end{cases}$$

Multiplications ces Eq. respectivement par $\frac{d\lambda}{d\varphi}, \frac{d\lambda}{d\psi}$ et $\frac{d\lambda}{d\pi}$, et ajoutons, on aura l'identité à démontrer.

Rapprochons ces Résultats connus du problème qui nous occupe. Je vois que j'aurai une solution très-générale en intégrant les Eq. Simultanées écrites ci-dessus, et prenant

$$\lambda(\varphi, \psi, \pi) = 0$$

λ étant une fonction arbitraire des fonctions déterminées φ, ψ, π .

Est-ce maintenant la solution la plus générale ?

Donc, - car, soit

$$f(x, y, z, u) = 0 \quad (2)$$

une intégrale ϕ de (1). - on a trouvé la solution

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad (3)$$

en posant pour plus de simplicité

$$\begin{cases} \alpha = \varphi(x, y, z, u) = 0 \\ \beta = \psi(x, y, z, u) = 0 \\ \gamma = \pi(x, y, z, u) = 0 \end{cases}$$

Je considère y, z et u en fonction de α, β, γ et x , et je reporte dans l'équation (2). Elle prend la forme

$$\chi(x, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

Je dis que x a disparu de lui-même. En effet, si l'on substitue, on pourrait écrire

$$x = \chi(\alpha, \beta, \gamma)$$

Donc, en différentiant,

$$\begin{cases} 1 = \frac{dx}{d\alpha} + p \frac{d\chi}{du} \\ 0 = \frac{dx}{d\beta} + q \frac{d\chi}{du} \\ 0 = \frac{dx}{d\gamma} + r \frac{d\chi}{du} \end{cases}$$

Si je considère p, q, r et si je reporte leurs valeurs dans l'éq. proposée, elle devient

$$\frac{P}{\frac{dx}{du}} = P$$

Donc

$$P = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Elle provient de ce que x

est en évidence. Donc il a disparu. Donc

$$\lambda(x, y, z) = 0$$

est bien l'intégrale la plus générale.

Il y a une autre méthode pour intégrer les Equations aux différentielles partielles.

Soit seulement le cas de deux variables

$$Pp + Qq = R$$

L'intégrale cherchée est une certaine Equation

$$f(x, y, z) = 0$$

Il est évident qu'on peut toujours la considérer comme résultant de l'élimination de z entre deux Eq. de la forme

$$\begin{cases} y = f_1(x, z) \\ z = f_2(x, z) \end{cases}$$

f_1 étant pris arbitrairement, et f_2 autre, convenablement choisie (ainsi : on peut prendre $q(x, y, z) = 0$ et $f(x, y, z) + q(x, y, z)\sqrt{1+x^2}$ q étant arbitraire : ce système donne f).

Cela posé, je vais remplacer p et q par les dérivées relatives à z . On aura, y et z étant des fonctions de x et de z ,

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = p + q \frac{dy}{dz}$$

Donc

$$p = \frac{dz}{dx} - q \frac{dy}{dz}$$

Je reporte dans l'Eq. donnée. Elle devient

$$P \frac{dz}{dx} - R + q \left\{ Q - P \frac{dy}{dz} \right\} = 0$$

Je puis disposer de la fonction de x que y représente

De manière que l'on ait

$$Q - P \frac{dy}{dx} = 0$$

et il reste

$$P \frac{dx}{dz} - R = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Cela fait deux Equations Simultanées à Intégrer. Il n'y entre ni α ni les Dérivées relatives à α . Les Intégr. Donc comme des Equations Différentielles ordinaires: seulement, les Constantes Devront être regardées comme des fonctions arbitraires de α . Nous aurons donc

$$\begin{cases} u = \pi(\alpha) \\ v = \pi_1(\alpha) \end{cases}$$

Il reste à éliminer α , et il est évident, si π et π_1 , étant des fonctions quelconques, que le résultat sera

$$u = \varphi(v)$$

φ étant encore une fonction arbitraire.

Cette méthode s'applique au cas de trois variables. Soit

$$Pp + Qq + Rr = V$$

Se peut poser

$$\begin{cases} y = f(x, \alpha, \beta) \\ z = f_1(x, \alpha, \beta) \\ u = f_2(x, \alpha, \beta) \end{cases}$$

f et f_1 étant arbitraires, et f_2 convenablement choisi pour que l'élimination de α et β donne l'Intégrale.

on aura

$$\frac{du}{dx} = p + q \frac{dy}{dx} + r \frac{dz}{dx}$$

d'où

$$p = \frac{du}{dx} - q \frac{dy}{dx} - r \frac{dz}{dx}$$

Reportant dans l'éq. donnée :

$$\left(p \frac{du}{dx} - V \right) + q \left(q - p \frac{dy}{dx} \right) + r \left(R - p \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

Ce qui peut s'écrire

$$\left. \begin{aligned} q - p \frac{dy}{dx} &= 0 \\ R - p \frac{dz}{dx} &= 0 \\ p \frac{du}{dx} - V &= 0 \end{aligned} \right\}$$

d'où

Ce qui donne

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{V}$$

Intégrant :

$$\left. \begin{aligned} u &= \psi_1(\alpha, \beta) \\ v &= \psi_2(\alpha, \beta) \\ w &= \psi_3(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \psi_1, \psi_2, \psi_3 \text{ arbitraires}$$

d'où, en éliminant α et β ,

$$w = \varphi(u, v)$$

ou

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

Il est clair qu'on raisonne à la même façon un plus grand nombre de variables.

Exemple I. - Trouver une surface telle que, si de l'origine on abaisse une perp. OA sur le plan tangent en M, puis, qu'on mène la Normale MN, et qu'on joigne OM, on ait constamment

$$OA \cdot MN = OM^2$$

l'équation du plan tangent est

$$z - z + p(x - x) + q(y - y) = 0$$

Donc

$$OA = \pm \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

± suivant que le plan coupe ou ne coupe pas l'axe des z. Le plan

$$MN = \frac{z}{\cos \angle OMN} = z \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Donc l'équation est

$$(i) \quad \pm z (z - px - qy) = x^2 + y^2 + z^2$$

1°. Prenons le signe +. alors l'éq. se réduit à

$$zpx + zqy = -(x^2 + y^2)$$

ce qui conduit à intégrer le système

$$\frac{dx}{zx} = \frac{dy}{zy} = -\frac{dz}{x^2 + y^2}$$

on en tire $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ d'où

$$y = cx$$

et ensuite : $\frac{dx}{x} = -\frac{z dz}{x^2 + y^2} = -\frac{z dz}{x^2(1 + c^2)}$, d'où

$$(1 + c^2)x^2 + z^2 = c'$$

Admettant ces deux équations pour rapport avec constantes :

$$\frac{y}{x} = c \quad x^2 + y^2 + z^2 = c'$$

L'intégrale générale est donc

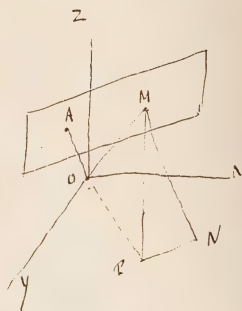
$$\frac{y}{x} = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

Ce représente une infinité de surfaces. - Si, dans le 1^{er} membre, au lieu de $\frac{y}{x}$, on avait z , on aurait l'éq. générale des surfaces de révolution. or, joignons OP : le coefficient angulaire de OP est $\frac{y}{x}$. Soit θ l'angle POx, et OM = ρ . Il vient $\theta = \varphi(\rho)$. Cela montre que, si θ est fixe, ρ est const. La section par le plan ZOx est donc un cercle. Donc : toute section faite par un plan du Z est un cercle ayant son centre à l'origine.

2°. Prenons le signe - . alors l'éq. (i) devient

$$px + qy = x^2 + y^2 + z^2$$

ce qui conduit à intégrer le système :



$$\frac{dx}{zx} = \frac{dy}{zy} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

qui est moins simple, mais peut cependant être intégrée: - on a d'abord

$$y = cx$$

Ainsi: $\frac{dx}{x} = \frac{z dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{z dz}{x^2(1+c^2) + z^2}$, équation homogène qu'on sait intégrer.

Exemple II. - Trouver une fonction telle que la somme du produit de ses dérivées partielles multipliées chacune par la variable correspondante, soit un multiple de la fonction.

Prendre 3 variables, pour fixer les idées. on doit avoir

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = mu$$

Intégrons le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{mu}$$

Donc

$$\left. \begin{aligned} y &= cx \\ z &= c_1 x \\ u &= c_2 x^m \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{y}{x} \\ c_1 &= \frac{z}{x} \\ c_2 &= \frac{u}{x^m} \end{aligned} \right.$$

Donc

$$u = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

est l'éq. générale des fonctions homogènes. - on voit par là que la fonction homogène jouit seule de la propriété demandée.

Remarque. - Si l'on avait m^e l'éq.

$$x \frac{dy}{dx} + z \frac{dy}{dz} + mu \frac{dy}{du} = y$$

ou

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + mu \frac{du}{du} = z$$

on aurait en les mêmes eq. simultanées à intégrer, par suite, la même équation.

En général: l'équation

$$P \frac{du}{dx} + Q \frac{du}{dy} + R \frac{du}{dz} = V$$

donne la même intégrale générale que l'éq.

$$P \frac{dx}{du} + Q \frac{dy}{du} + V \frac{du}{du} = P$$

et les analogues qu'on pourrait former.

Exemple III. - Trouver une surface telle que la Normale à cette surface rencontre toujours une droite fixe.

Les Eq. du plan tangent sont

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

Les Eq. de la Normale sont

$$\begin{cases} x' - x + p(z' - z) = 0 \\ y' - y + q(z' - z) = 0 \end{cases}$$

Cette normale doit toujours rencontrer une droite fixe que je prends passant par l'origine, et qui sera

$$\begin{cases} x' = az' \\ y' = bz' \end{cases}$$

Éliminons x', y', z' entre ces 4 équations. on trouve, pour simplifier

$$p(y - bz) + q(ax - x) + ay - bx = 0$$

C'est l'équation du problème. — on met

$$\frac{dx}{y - bz} = \frac{dy}{ax - x} = \frac{dz}{bx - ay} \quad (1)$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{ax - x}{y - bz} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{bx - ay}{y - bz} \end{cases}$$

Ces équations différentielles à intégrer.

Mais on peut avoir recours à un artifice. Prenons les 2 rapports (1).

Multiplications les deux termes du 1^{er} par a , ceux du second par b , et ceux du 3^e par 1; puis ajoutez terme à terme:

$$\frac{a dx}{a(y - bz)} = \frac{b dy}{b(ax - x)} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{adx + bdy + dz}{0}$$

Donc il faut qu'on ait

$$adx + bdy + dz = 0$$

Donc

$$ax + by + z = C$$

Maintenant, en multipliant un membre par x, y et z , on aura

$$\frac{x dx}{x(y - bz)} + \frac{y dy}{y(ax - x)} = \frac{z dz}{z(bx - ay)} = \frac{x dx + y dy + z dz}{0}$$

Donc

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1$$

Par suite, l'équation générale est

$$ax + by + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

C'est l'équation des surfaces de révolution.

Si la droite donnée est l'axe des z , il reste

$$z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

ce qui revient à

$$x^2 + y^2 + z^2 = q_1(z)$$

ou

$$z^2 - q_1(z) = -(x^2 + y^2)$$

ou enfin

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Enant une Equation aux Différentielles partielles D'un Degré plus élevé que le 1^{er}. il n'y a pas de méthode générale pour les intégrer.

La plus remarquable, et la 1^{re}. qu'on ait intégrée, est celle des cordes vibrantes.

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Nous l'avons rencontrée (p. 347) en éliminant q et ψ dans l'Equation $y = q(x+at) + \psi(x-at)$.

Cherchons à l'intégrer. — Nous

$$\begin{cases} x+at = \alpha \\ x-at = \beta \end{cases}$$

L'Equation (1) deviendra

$$\frac{d^2 y}{d\alpha d\beta} = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{dy}{d\beta} = 0$$

Donc

$$\frac{dy}{d\beta} = \varphi(\beta)$$

$$dy = \varphi(\beta) d\beta$$

$$y = \int \varphi(\beta) d\beta + C$$

et C est une fonction arbitraire de α : Donc

$$y = \pi(\beta) + \pi_1(2)$$

car.

$$y = \pi(x-at) + \pi_1(x+at)$$

La difficulté est de déterminer les fonctions arbitraires dans chaque cas particulier.

Calcul
des
Variations.

Le Calcul Des Variations a pris son origine
 Dans les Questions De Maximum et Minimum considérées d'une
 manière Générale.

On a vu, Dans le Calcul Différentiel, que si l'on a

$$V = f(x, y, z)$$

et si l'on Demande les Valeurs De x , y et z qui rendent V maximum
 ou minimum, il suffit De les chercher parmi celles qui annullent
 $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$.

Dans le calcul Des variations, on considère une Intégrale
 Définie:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

ou

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots\right)$$

f étant une fonction connue, et y , z Des fonctions Inconnues
 De x , soit $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Il est évident que si je prends
 ainsi pour y et z deux fonctions, et si je remplace y et z par
 ces fonctions, V Devient fonction De x , et, en intégrant, j'ob-
 -tiens un résultat Déterminé. — Si je change φ et ψ , l'intégrale
 changera, et l'on peut se proposer De trouver ces deux fonctions
 De manière que l'Intégrale Définie soit un maximum ou
 un minimum, c.à.d. ait une valeur plus grande ou plus petite
 que celle qu'elle prend pour Des valeurs infiniment voisines
 Des fonctions.

on imagine pour un moment que l'on remplace y et z
 par Des fonctions qui en Diffèrent Infinitement peu,

$y + \delta y + z + \delta z$, δy et δz étant d'ailleurs des fonctions arbitraires de x . alors, l'intégrale devient

$$\int_{x_0}^{x_1} V' dx$$

et il faudra, s'il y a maximum ou minimum, que la différence

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx - \int_{x_0}^{x_1} V' dx$$

ait un signe constant quels que soient δy et δz .

afin d'éclaircir cela, on peut recourir à la géométrie.

Choisissons pour y et z , deux fonctions $y = q(x)$ et $z = \psi(x)$ telles que $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ soit maximum ou minimum. cela revient à chercher une courbe AB , dont les équations soient $y = q(x)$ et $z = \psi(x)$, telle que l'intégrale définie soit plus grande ou plus petite que si l'on prenait une autre courbe différente. Ces extrémités A et B , de la courbe, correspondantes aux abscisses x_0 et x_1 , ne sont pas toujours données. ainsi, on peut demander de trouver la plus courte ligne qui aille, dans l'espace, d'une courbe à une autre, et ici, l'intégrale définie exprime la longueur de la ligne AB . — De même, encore, si l'on demande quelle est la courbe plane qui passe entre deux points A et B , telle que, si elle tourne autour d'une ligne fixe, la surface de révolution soit maxima ou minima : l'intégrale représente l'aire de la surface, et les extrémités sont alors données.

Revenons au 1^{er} problème, où il s'agit de mener entre deux points A et B la ligne la plus courte.

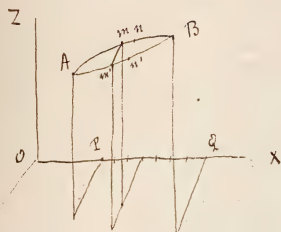


alors ici, $V dx = ds$, ou

$$V dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

ainsi l'Intégrale dont on cherche le maximum est

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$



Soit AmB la courbe maximum; je considère une courbe voisine $A'm'B'$. L'intégrale définie représente une somme d'éléments obtenus en divisant $Qq = x_1 - x_0$ en parties égales, et menant par les points de division des plans perp. à Ox , qui découpent AmB et $A'm'B'$ en éléments correspondants tels que mn et $m'n'$. alors, pour passer de m à m' , x reste le même, y et z devenant $y + \delta y$ et $z + \delta z$. Ce sont ces accroissements arbitraires δy et δz qu'on appelle des variations. alors, la nouvelle valeur de l'Intégrale définie devient

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{d(y + \delta y)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d(z + \delta z)}{dx}\right)^2}$$

et il faut que la 1^{re} Intégrale soit toujours plus petite que la 2^e.

Mais remarquons qu'il n'est pas permis ici et qu'il serait souvent nécessaire de supposer que x devint aussi $x + \delta x$.

Néanmoins, on aurait pu le faire. En effet, je puis regarder toujours les deux Intégrales comme composées d'un même nombre d'éléments, sans que ces éléments commencent aux mêmes abscisses. Si, il n'y aurait aucun avantage, mais on le pourrait si on le trouvait convenable: surtout. δx devrait être infiniment petit.

Je dis maintenant que c'est là la seule méthode générale.
En effet, supposons que A et B ne soient plus fixes, mais
soumis à être sur deux courbes données. Et soient évident
que si je décompose en éléments, la ligne de plans qui détermi-
nent A et B n'atteindra pas toute la courbe voisine A'B'.

Dans la méthode marquerait ici de généralité. Donc, si l'on
want comparer les deux intégrales et les deux courbes élément à
élément, il faut attribuer des variations aux 3 coordonnées :
Savoir que si celles de A sont x_0, y_0, z_0 , celles de A'
pour ϵ seront $x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0$. (Ici, il est évident
que $\delta x_0, \delta y_0$ et δz_0 ne sont pas indépendants, puisque A et A' sont
sur la courbe D).

Maintenant, pour que les méthodes connues s'appliquent ici,
on est convenu de regarder $\delta x, \delta y$ et δz comme provenant
d'accroissement arbitraire donné à un certain paramètre
dont on introduit dans le calcul.

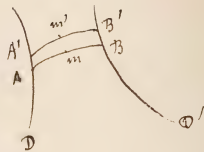
Les équations d'une courbe peuvent s'écrire ainsi

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f_1(t) \\ z = f_2(t) \end{cases}$$

Je suppose que ce soient là les équations de la ligne cherchée
(ou, en général, les relations entre x, y et z). Les équations de
la courbe infiniment voisine pourront s'écrire

$$\begin{cases} x = f(t) + (m-a) q_1(x, y, z) \\ y = f_1(t) + (m-a) q_2(x, y, z) \\ z = f_2(t) + (m-a) q_3(x, y, z) \end{cases}$$

qui donnent les précédentes pour $m=a$. — Comme d'ailleurs



x , y et z sont fonctions de t , ces trois équations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x = q(t, m) \\ y = \psi(t, m) \\ z = \pi(t, m) \end{cases}$$

et ces eq. peuvent représenter les équations de toute ligne, soit de la ligne minima, soit de la ligne voisine.

alors, il faut bien distinguer deux espèces d'accroissements infiniment petits dont x , y et z sont susceptibles.

Supposons que m ait reçu une certaine valeur. alors, on a une courbe AB déterminée. Pour passer du point M au point M' sur cette courbe, il faudra changer t en $t+dt$, d'où

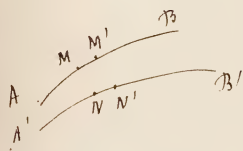
$$\begin{cases} dx = \frac{dq}{dt} dt \\ dy = \frac{d\psi}{dt} dt \\ dz = \frac{d\pi}{dt} dt \end{cases}$$

Supposons au contraire que, laissant t constant, m devienne $m+dm$. alors, la courbe prend une position infiniment voisine $A'N B'$, de façon qu'alors x , y , z éprouvent des accroissements pour arriver au point correspondant N , dont je représente les coordonnées par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et

$$\begin{cases} dx = \frac{dq}{dm} dm \\ dy = \frac{d\psi}{dm} dm \\ dz = \frac{d\pi}{dm} dm \end{cases}$$

Il résulte de là que si l'on a une fonction quelconque

$$V = f(x, y, z)$$



La variation s'obtient d'après les règles du Calcul Différentiel:

$$\delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z$$

ou bien, en remplaçant δx , δy et δz par leurs valeurs,

$$\delta V = V' \delta m.$$

Ces fonctions φ , ψ et π sont quelconques, et seulement introduites pour permettre d'appliquer les méthodes du Calcul Différentiel.

Théorème. — La différentielle de la Variation est égale à la Variation de la différentielle.

$$d \delta V = \delta dV.$$

Considérons x, y, z remplacés en fonction de t et de m , alors

$$V = \lambda(t, m)$$

d'où l'on a

$$\left. \begin{aligned} \delta V &= \frac{d\lambda}{dm} \delta m \\ d \delta V &= \frac{d\left(\frac{d\lambda}{dm}\right)}{dt} \delta m dt \end{aligned} \right| \begin{aligned} dV &= \frac{d\lambda}{dt} dt \\ \delta dV &= \frac{d\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}{dm} \delta m dt \end{aligned}$$

Car $\frac{\delta V}{\delta m} = \frac{dV}{dm}$. Ces deux résultats viennent au même

eq. f. d.

on généralisera aisément : et l'on a

$$\delta d^n V = d^n \delta V$$

En effet, on aura

$$\begin{aligned} \delta d^n V &= \delta d(d^{n-1} V) \\ &= d \delta(d^{n-1} V) \end{aligned}$$

de même

$$\delta d^{n-1} V = d \delta d^{n-2} V$$

Remplaçant

$$\delta d^n V = d^n \delta d^{n-1} V$$

et ainsi de suite. Donc...

eq. f. d.

Théorème. — La Variation d'une Intégrale est égale à l'Intégrale de la Variation.

Cherchons

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

x_0 et x_1 , pouvant aussi dépendre de m . — Je dis que

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta V dx$$

Introduisons les variables t et m . Soient t_0 et t_1 , les valeurs de t correspondantes à x_0 et x_1 . alors on a

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \delta \int_{t_0}^{t_1} V \frac{dx}{dt} dt$$

t_0 et t_1 , sont indépendants de la variation de m . Donc l'on peut différentier sous le signe \int et

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt$$

maintenant, on peut faire sortir dt du signe δ , puisque t est indépendant de m :

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{t_0}^{t_1} \delta (V dx) = \int_{x_0}^{x_1} \delta V dx \quad \text{c.q.f.d.}$$

autre démonstration. — on soit que, x_0, v_1, \dots, v_m étant les éléments de l'Intégrale, on a à la limite, et m pouvant croître indéfiniment,

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx = \lim (v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_m)$$

Maintenant, quand on changera m en $m+1$, la nouvelle intégrale sera, en la supposant décomposée en un même

nombre d'éléments :

$$\lim (v'_0 + v'_1 + v'_2 + \dots + v'_m)$$

Pour avoir la variation, je retranche :

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_0}^{x_1} v dx &= \lim \left[(v'_0 - v_0) + (v'_1 - v_1) + \dots + (v'_m - v_m) \right] \\ &= \lim \sum \delta v_i = \int_{x_0}^{x_1} \delta(v) dx \quad \text{c q f d.} \end{aligned}$$

Je suppose maintenant qu'on ait à rendre maximum ou minimum la fonction

$$\int_{x_0}^{x_1} v dx$$

Je dis qu'une condition commune au maximum & au minimum est que

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} v dx = 0$$

Je pose

$$\int_{x_0}^{x_1} v dx = U$$

Je suppose que y et z aient été trouvés de manière que U soit maximum. Si je change m en $m + \delta m$, l'intégrale U prend une autre valeur U' , et j'aurai

$$U' - U = \frac{dU}{dm} \delta m + R$$

R étant infiniment petit par rapport au terme précédent.

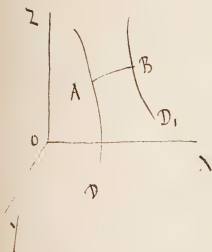
Cette différence doit conserver un signe invariable quel que soit δm , pourvu qu'il soit infiniment petit. Cela est impossible à moins que $\frac{dU}{dm} \delta m = 0$, ou

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} v dx = 0$$

pour le maximum et le minimum,

c q f d.

on distingue le maximum du minimum en ayant recours aux termes de seconde dimension. Mais n'est souvent inutile, quand on peut reconnaître a priori qu'il n'y a qu'un maximum ou qu'un minimum admissible.



Exemple. — Cherchons la ligne la plus courte entre deux courbes.

L'intégrale à rendre minima est

$$\int_{x_0}^{x_1} ds$$

Donc on doit avoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta ds = 0$$

$$\text{ou} \quad \int_{x_0}^{x_1} \delta ds = 0$$

et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

d'où

$$ds \delta ds = dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz$$

$$\delta ds = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds}$$

Donc il faut qu'on ait

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) = 0$$

Intégrons par parties, on a

$$\int \frac{dx}{ds} \delta dx = \int \frac{dx}{ds} d \delta x = \frac{dx}{ds} \delta x - \int \delta x d \left(\frac{dx}{ds} \right)$$

Donc on devra avoir :

$$\left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta x \frac{d}{ds} \frac{dx}{ds} + \delta y \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} + \delta z \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds} \right) ds = 0$$

ou

$$(A)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (B) ds = 0$$

Or, si qu'il faut qu'on ait séparément

$$\begin{cases} (A) = 0 \\ (B) = 0 \end{cases}$$

En effet, si $B \neq 0$, c.àd.

$$\delta x \frac{d}{ds} \frac{dx}{ds} + \delta y \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} + \delta z \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds} \neq 0$$

je pourrai concevoir qu'on attribue à δx , δy et δz une infinité de valeurs assignées à la condition que δx_0 , δy_0 , δz_0 , δx , δy , δz , restent fixes. alors $(A)_{x_0}^{x_1}$, qui ne dépend que des variations aux limites, et dont la valeur est

$$(A)_{x_0}^{x_1} = \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_1 \delta z_1 \right) - \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)_0 \delta x_0 + \dots \right)$$

restera fixe, tandis que $\int_{x_0}^{x_1} (B) ds$ variera. or c'est impossible. donc:

$$(A) = 0$$

$$B = 0$$

c.àd.

$$\delta x \frac{d}{ds} \frac{dx}{ds} + \delta y \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} + \delta z \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds} = 0 \quad (1)$$

$$\left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_1 \delta z_1 \right] - \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_0 \delta z_0 \right] = 0 \quad (2)$$

d'où l'éq. (1) est l'équation Indéfinie, et (2) l'équation aux limites.

Supposons d'abord que la ligne minima ne soit assujéti à aucune condition dans son cours. alors, pour passer de m au point correspondant m' , je puis attribuer à δx , δy , δz des

valeurs arbitraires. Donc l'éq. (1) est identique, et donne

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0 \quad d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

Mais, comme deux équations suffisent pour déterminer une droite, il faut que les 3 conditions se réduisent à 2 : en effet, si j multiplie la 1^{re} par $\frac{dx}{ds}$, la 2^e par $\frac{dy}{ds}$, et la 3^e par $\frac{dz}{ds}$, et si j'ajoute, j'aurai une identité.

En intégrant :

$$\frac{dx}{ds} = c \quad \frac{dy}{ds} = c' \quad \frac{dz}{ds} = c''$$

(et $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$) - divisant membre à membre :

$$\frac{dy}{dx} = A \quad \frac{dz}{dx} = B$$

et enfin

$$y = Ax + A' \quad z = Bx + B'$$

Ces sont les équations d'une ligne droite.

Comment pourra-t-on déterminer les 4 constantes ?

C'est l'équation aux limites (2) qui va servir à cela.

Si l'on supposait d'abord que A et B fussent fixes, alors

$x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ sont connus. alors l'éq. (2) est identique.

- que il ne peut rien apprendre : et en effet, il suffit d'exprimer que la droite passe en A et en B pour déterminer les 2 constantes.

Mais supposons que ces extrémités soient assujetties à rester sur D et D', alors on donne les équations

$$D \begin{cases} y = q(x) \\ z = \psi(x) \end{cases} \quad D' \begin{cases} y = q_1(x) \\ z = \psi_1(x) \end{cases}$$

Le point $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0)$ appartient à D ,
on a

$$\begin{cases} \delta y_0 = \varphi'(x_0) \delta x_0 \\ \delta z_0 = \psi'(x_0) \delta x_0 \end{cases}$$

Donc dans D ces variations sont fonctions de δx_0 . - D'où.
Lors, comme il n'y a aucune relation entre les extrémités, l'eq.
(2) se partage en deux, une pour chaque limite. Ainsi
la première

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0$$

si l'on remplace δy_0 et δz_0 par leurs valeurs, δx_0 est facteur
commun, et il reste

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \varphi'(x_0) + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \psi'(x_0) = 0$$

ou, en divisant par $\frac{dx}{ds}$,

$$1 + A \varphi'(x_0) + B \psi'(x_0) = 0$$

de même

$$1 + A \varphi'(x_1) + B \psi'(x_1) = 0$$

où j'ajoute

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0) \\ z_0 = \psi(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \varphi(x_1) \\ z_1 = \psi(x_1) \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} y_0 = Ax_0 + A' \\ z_0 = Bx_0 + B' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = Ax_1 + A' \\ z_1 = Bx_1 + B' \end{cases}$$

on a 10 équations, et 10 inconnues $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, A, A', B, B'$.

Donc on peut déterminer ces quantités. —

Remarque. — L'équation aux limites manifeste une propriété remarquable de la ligne la plus courte: c'est qu'elle est Normale à la surface. — En effet, on a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0$$

Je désigne par δs_0 l'élément AA' de la courbe D : alors

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \left(\frac{\delta y}{\delta s}\right)_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \left(\frac{\delta z}{\delta s}\right)_0 = 0$$

ce qui montre bien que la propriété.

Supposons maintenant que l'extrémité A soit assujétie à rester sur une surface, dont l'équation soit

$$z = f(x, y)$$

Noté

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

et

$$\delta z_0 = \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \delta y_0$$

Je substitue dans l'éq. aux limites: et n'y reste plus que deux variations arbitraires: et elle deviendra

$$M \delta x_0 + N \delta y_0 = 0$$

d'où

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

ce qui, avec

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

complète le nombre d'éq. nécessaires.

Supposons encore que la ligne minima soit recte sur une surface quelconque. alors, soit $m(x, y, z)$ un point de la ligne minima. Il est clair que, si j'en donne δx et δy , δz sera déterminé. En effet, l'éq. de la surface étant

$$f(x, y, z) = 0$$

on en déduit

$$(3) \quad \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z = 0$$

Si j'en viens maintenant à l'éq. indéfinie (1), j'en puis donc plus facilement à zéro les deux coefficients des variations.

Mais l'éq. (3) me donne

$$\delta z = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} \delta x - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}} \delta y$$

Si j'en reporte dans (1), elle prend la forme

$$M \delta x + N \delta y = 0$$

donc

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

En ad. en effectuant,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} \frac{d}{ds} \frac{dx}{ds} - \frac{df}{dx} \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds} = 0 & M=0 \\ \frac{df}{dx} \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} - \frac{df}{dy} \frac{d}{ds} \frac{dz}{ds} = 0 & N=0 \end{cases}$$

Ces deux équations doivent rentrer l'une dans l'autre. Et en effet, si on les multiplie respectivement par $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ et qu'on ajoute, on a une identité.

Il restera à en interpréter une, ou une seule combinaison, si c'est possible.

Les Eq. (4) montrent que le plan osculateur en chaque point de la ligne la plus courte est normal à la surface sur laquelle elle est tracée. En effet, ces Eq. peuvent s'écrire

$$\frac{\frac{df}{dx}}{d \cdot \frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{df}{dy}}{d \cdot \frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{df}{dz}}{d \cdot \frac{dz}{ds}}$$

ou soient λ, μ, ν les angles de la normale principale à la courbe avec les axes, et α, β, γ ceux de la normale à la surface. on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda = \int \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} \\ \cos \mu = \int \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} \\ \cos \nu = \int \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\frac{df}{dx}}{V} \\ \cos \beta = \frac{\frac{df}{dy}}{V} \\ \cos \gamma = \frac{\frac{df}{dz}}{V} \end{array} \right. \quad V = \sqrt{\left| \frac{df}{dx} \right|^2 + \left| \frac{df}{dy} \right|^2 + \left| \frac{df}{dz} \right|^2}$$

Donc les Eq. précédentes sont

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \lambda} = \frac{\cos \beta}{\cos \mu} = \frac{\cos \gamma}{\cos \nu} = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu}} = 1$$

d'où

$$\alpha = \lambda \quad \beta = \mu \quad \gamma = \nu$$

c. q. f. d. .
ainsi la ligne la plus courte est une ligne géodésique.

Pour une Sphère, dont l'eq. est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

on a

$$x \delta x + y \delta y + z \delta z = 0$$

$$\delta z = -\frac{x}{z} \delta x - \frac{y}{z} \delta y$$

et les Equations (4) deviennent

$$\begin{cases} z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} = 0 \\ z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} = 0 \end{cases}$$

qui donnent les intégrales

$$\begin{cases} z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} = C \\ z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} = C' \end{cases}$$

Divisant

$$z dx - x dz = K (x dy - y dx) \quad K = \frac{C'}{C}$$

q. du 1^{er} ordre. Divisant par z^2 , elle donne

$$d \frac{x}{z} = K d \frac{y}{z}$$

Donc

$$\frac{x}{z} = K \frac{y}{z} + K'$$

$$x = Ky + K'z$$

c'est l'eq. d'un plan passant à l'origine : Donc la ligne la plus courte est un arc de grand cercle.

Sur un cylindre :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x \delta x + y \delta y = 0$$

Parque δz n'entre pas, il est évident que si l'on tire δy ,

qu'on reporte dans (1) le coefficient de l'arbitraire dx reste tel qu'il était, et, comme il doit être nul :

$$d \frac{dx}{ds} = 0$$

$$\frac{dx}{ds} = C$$

Donc la ligne minima fait avec la génératrice (parallèle à Ox) un angle constant : c'est un arc d'Helice. - Si je continue : j'aurai

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = C$$

$$-\frac{dz^2}{c^2} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\frac{dz^2(1-c^2)}{c^2} = dx^2 + dy^2$$

or, $dy = -\frac{x}{y} dx$. Reportant et intégrant, on aura

$$x = R \sin k z$$

Cherchons à développer en général la condition

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx = 0$$

Il faut donc chercher l'expression de la variation d'une fonction

$$V = f(x, y, y', y'' \dots z, x', z'' \dots)$$

soit

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta(V dx) = \int_{x_0}^{x_1} (\delta V \cdot dx + V \delta dx)$$

l'intégrale de 2^e forme pour parties : on a

$$\int V d\alpha = \int V d\alpha = V \alpha - \int \alpha dV$$

Substituant, on aura

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} V d\alpha = V_1 \alpha_1 - V_0 \alpha_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (\delta V d\alpha - \alpha dV)$$

et l'élémentaire de 2^e forme qu'on cherche à développer. on voit qu'on a

$$dV = M d\alpha + N dy + P dy' + Q dy'' + R dy''' + \dots \\ + N' d\alpha + P' d\alpha' + Q' d\alpha'' + R' d\alpha''' + \dots$$

δV s'en déduira en changeant d en δ :

$$\delta V = M \delta \alpha + N \delta y + P \delta y' + \dots \\ + N' \delta \alpha + P' \delta \alpha' + \dots$$

Toutefois, cela n'est pas toujours vrai. Si l'on traitait dans V du terme relatif aux limites, et contenant $\alpha_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots$ alors la valeur ci-dessus de δV ne serait pas complète, et comprendrait des termes tels que

$$\frac{dV}{d\alpha_0} \delta \alpha_0 + \frac{dV}{dy_0} \delta y_0 + \text{etc.}$$

Je vais d'abord supposer que ces termes n'existent pas. alors on aura

$$\delta V \cdot d\alpha - \alpha dV = d\alpha \left\{ \begin{array}{l} N(\delta y - y' \delta \alpha) + P(\delta y' - y'' \delta \alpha) \\ + Q(\delta y'' - y''' \delta \alpha) + \text{etc.} \\ + N'(\delta \alpha - \alpha' \delta \alpha) + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Pour simplifier, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta y - y' \delta \alpha = \omega \\ \delta \alpha - \alpha' \delta \alpha = \omega' \end{array} \right.$$

et il vient alors

$$\int V \cdot du - \int z \cdot dv = du \left\{ Nw + P \frac{dw}{du} + Q \frac{d^2w}{du^2} + \dots \right. \\ \left. + N'w' + P' \frac{dw'}{du} + \dots \right.$$

En effet, on a vu $\int y - y' du = w = \int z' du$

$$\int y' = \int \frac{dy}{du} = \frac{du \int dy - dy \int du}{du^2} = \frac{d \int y - y' du}{du} = \frac{d(w)}{du} + y'' du$$

$$\int y' = \frac{dw}{du} + y'' du$$

$$\int y' - y'' du = \frac{dw}{du} \quad \text{c.q.f.d.}$$

ainsi, on définitive,

$$\int_{u_0}^{u_1} V du = \left(V \int du \right)_{u_0}^{u_1} + \int_{u_0}^{u_1} du \left\{ Nw + P \frac{dw}{du} + Q \frac{d^2w}{du^2} + \dots \right. \\ \left. + N'w' + P' \frac{dw'}{du} + \dots \right.$$

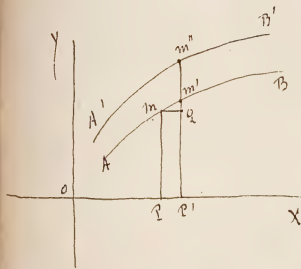
avec :

$$\begin{cases} w = \int y - y' du \\ w' = \int z - z' du \end{cases}$$

avant d'aller plus loin, ayons recours à la Géométrie.

Supposons qu'il n'y ait que deux variables. Soit AB la courbe cherchée, on en prend deux points, $PP' = du$. on aura $m'q = m'q' \text{ tg } m'm'q = y' du$. Si l'on passe à la courbe voisine $A'B'$, $\int y$ est $q m''$. Donc $\int y = y' du + m''m'$. Donc $m''m' = \int y - y' du$. Donc $m'm''$ est ce que nous avons appelé w . ainsi, la variable arbitraire w signifie la différence entre les deux ordonnées de deux courbes qui répondent à une même abscisse.

Si il y a trois variables, c'est la même chose, seulement, on ne parle plus de la courbe elle-même, mais de ses projections.



Opérons maintenant à simplifier l'expression précédente.

On aura

$$\int_{x_0}^{x_1} P \frac{d\omega}{dx} dx = (P\omega)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \omega \frac{dP}{dx} dx$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} Q \frac{d^2\omega}{dx^2} dx &= \left(Q \frac{d\omega}{dx} \right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dQ}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx \\ &= \left(Q \frac{d\omega}{dx} - \omega \frac{dQ}{dx} \right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \omega \frac{d^2Q}{dx^2} dx \end{aligned}$$

De même

$$\int_{x_0}^{x_1} R \frac{d^3\omega}{dx^3} dx = \left(R \frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{dR}{dx} \frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} \omega \right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \omega \frac{d^3R}{dx^3} dx$$

et ainsi de suite.

ainsi

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx = A_1 - A_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + K'\omega') dx$$

en posant

$$\left\{ \begin{aligned} A &= V\omega + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \dots \right) + \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \dots \right) + \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R - \dots \right) + \dots \\ &\quad + \omega' \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \dots \right) + \frac{d\omega'}{dx} \left(Q' - \dots \right) + \frac{d^2\omega'}{dx^2} \left(R' - \dots \right) + \dots \\ K &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots \\ K' &= N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \dots \end{aligned} \right.$$

or, pour que cette équation variation soit nulle, il faut qu'elle ait séparément

$$\begin{cases} A_1 - A_0 = 0 & (\text{Eq. aux limites}) \\ K\omega + K'\omega' = 0 & (\text{Eq. Indéfinie}) \end{cases}$$

d'implication est la même que plus haut (p. 372). Car,

ω et ω' sont deux fonctions arbitraires. on peut donc, de x_0 à x_1 , leur attribuer une infinité de valeurs. Cela qu'on, si $k\omega + k'\omega'$ n'étant pas toujours nul, il y aurait entre x_0 et x_1 , un certain intervalle, de a à b , dans lequel cet élément aurait une ligne constante, toujours la ligne $+$ par exemple. Maintenant, donnons à ω et ω' des valeurs croissantes: l'intégrale augmentera. Si, au lieu, ω et ω' restent les mêmes aux limites: donc le principe est démontré.

Si je remets pour ω et ω' leurs valeurs, l'éq. Indéfinie devient

$$k \delta y + k' \delta z - \delta x (k y' + k' z') = 0$$

Maintenant: ou bien la courbe n'est soumise à aucune condition dans l'intervalle des limites: alors δx , δy et δz sont du voisinage tout-à-fait indépendants: donc l'éq. indéfinie se partage en trois autres

$$\begin{cases} k = 0 \\ k' = 0 \\ k y' + k' z' = 0 \end{cases}$$

et la 3^e équation est comprise dans les deux autres: il n'y a en réalité que deux équations, qui déterminent la nature de la courbe. Elles sont

$$\begin{cases} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \dots = 0 \\ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \dots = 0 \end{cases}$$

Ce sont deux équations linéaires à 3 variables y , z et x . De quel ordre seront-elles en général? V est une fonction donnée, de la forme

$$V = f(x, y, y', y'', \dots, z, z', z'', \dots)$$

Supposons que V soit d'ordre n de différentiation : les
 eq. précédentes seront d'ordre $2n$. Or, supposons par ex. V
 du second ordre. V contient y, y', y'', z, z', z'' . alors
 z n'existe pas, et dV s'écrit à $dxdy$: et q en général
 peut contenir y'' . or q est soumis à deux différentiations :
 donc on aura y''' et $y^{(iv)}$. — et la même chose en général.

Cependant, cela n'est pas toujours vrai. Si par exemple
 V était linéaire pour rapport aux dérivées d'ordre le
 plus élevé, alors l'ordre de la eq. simultanée serait au plus $2n-1$.

Le nombre des constantes montera donc d'ordinaire
 à $2n$, et il s'agit de les déterminer.

Mais auparavant : — si la ligne est assujettie à rester
 sur une surface donnée, dont l'équation est

$$F(x, y, z) = 0$$

comme le point $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ est sur la surface, il
 faudra que

$$\frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z = 0 \quad (2)$$

Il n'y a alors que deux des variations d'arbitraire. on a

$$\begin{cases} \delta y = \omega + y' \delta x \\ \delta z = \omega' + z' \delta x. \end{cases}$$

Substituant, il vient

$$\left(\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + z' \frac{dF}{dz} \right) \delta x + \frac{dF}{dy} \omega + \frac{dF}{dz} \omega' = 0$$

Mais le terme en δx est nul en vertu de l'eq. (1). donc
 il reste

$$\frac{dF}{dy} \omega + \frac{dF}{dz} \omega' = 0$$

avec

$$K\omega + K'\omega' = 0$$

Unissons $\frac{\omega'}{\omega}$: il vient

$$K' \frac{dF}{dy} - K \frac{dF}{dx} = 0$$

Cette eq. jointe à l'eq. finale

$$F(x, y, z) = 0$$

résout le problème.

Si, il n'y aura que 2n constantes, au lieu de 2n, à déterminer.

C'est ici qu'on fait usage de l'Equation aux limites : elle sert à déterminer les constantes.

Si comme cela arrive dans la plupart des cas, les deux limites sont indépendantes l'une de l'autre : alors cette eq. aux limites, $A_1 - A_0 = 0$, se partage en deux autres :

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

En particulier, supposons V du 2^d ordre, et attaquons-nous spécialement à ce qui concerne la limite x_1 . Nous aurons

$$A_1 = 0$$

et l'eq. devient

$$\left. \begin{aligned} V_1 \delta x_1 + \left(\delta y_1 - y'_1 \delta x_1 \right) \left(1 - \frac{dQ_1}{dx} \right) + \left(\delta y'_1 - y''_1 \delta x_1 \right) Q_1 \\ + \left(\delta z_1 - z'_1 \delta x_1 \right) \left(1 - \frac{dQ'_1}{dx} \right) + \left(\delta z'_1 - z''_1 \delta x_1 \right) Q'_1 \end{aligned} \right\} = 0$$

qui est de la forme

$$\left. \begin{aligned} a_1 \delta x_1 + b_1 \delta y_1 + c_1 \delta z_1 \\ + b'_1 \delta y'_1 + c'_1 \delta z'_1 \end{aligned} \right\} = 0$$

les variations ne portent que sur les dérivées seules. En général, si v est d'ordre n , les δ ne portent que sur les dérivées d'ordre $n-1$.

on aurait donc une équation semblable pour l'autre limite.

Au milieu, on a à intégrer le système

$$\begin{cases} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \\ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

ce qui amène à 4 constantes arbitraires, c_1, c_2, \dots etc. Cela fait 4 inconnues, qui sont les seules, si les limites sont fixes, ce que j' suppose. Soient

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

les intégrales, qui contiennent les constantes. J'aurai

$$\left. \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \right\} \text{ 4 Equations}$$

($\varphi_1 = \varphi(x, y, z)$, etc.) - Maintenant, B est fixe. Donc

$\delta y_1 = \delta z_1 = \delta x_1 = 0$; mais $\delta y'_1$ et $\delta z'_1$ sont complètement arbitraires. Donc

$$\begin{cases} b'_1 = 0 \\ c'_1 = 0 \\ b'_0 = 0 \\ c'_0 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ 2 Eq.}$$

on a donc 4 Eq. pour 4 inconnues.

Si, B étant donnée, A doit rester sur une courbe D, dont les Eq. sont

$$\begin{cases} y = \lambda(x) \\ z = \mu(x) \end{cases}$$

alors il y a 2 inconnues de plus, x_0, y_0, z_0 . et il y a aussi 2 Eq. de plus, car D n'est

$$\begin{cases} y_0 = \lambda(x_0) \\ z_0 = \mu(x_0) \end{cases} \quad | \quad 2 \text{ Eq.}$$

Donc, il faut que le point $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0)$ soit sur D. Aonc

$$\begin{cases} \delta y_0 = \lambda'(x_0) \delta x_0 \\ \delta z_0 = \mu'(x_0) \delta x_0 \end{cases}$$

Je porte ces valeurs dans l'Eq. aux limites, qui est de la forme

$$\begin{aligned} a_0 \delta x_0 + b_0 \delta y_0 + c_0 \delta z_0 \\ + b'_0 \delta y'_0 + c'_0 \delta z'_0 \end{aligned} \quad | \quad = 0$$

et j'ai

$$\{a_0 + b_0 \lambda'(x_0) + c_0 \mu'(x_0)\} \delta x_0 = 0 \quad | \quad \text{Eq.}$$

Donc bien 2 Eq. de plus.

De même si B n'est pas fixe.

Si la courbe doit rester sur une surface

$$F(x, y, z) = 0$$

on n'a plus que 2n constantes. alors, il y a $2n-2$ Eq. de condition, et le problème n'est possible qu'avec certaines restric-

liens. - Prenons par exemple V du 2^e ordre. alors, l'eq. d'intégrales est du 2^e ordre, et il y a 4 constantes, c_1, c_2, c_3, c_4 . Supposons les limites fixes. Il y aura 6 eq. pour déterminer les 4 constantes. En effet, soit

$$y = q(x)$$

L'intégrale, avec 4 constantes, après qu'on a éliminé z au moyen de l'eq. $F = 0$. - on doit avoir

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = q(x_0) \\ y_1 = q(x_1) \end{array} \right\} 2 \text{ eq.}$$

L'eq. aux limites doit d'ailleurs

$$\left. \begin{array}{l} a_0 \delta x_0 + b_0 \delta y_0 + c_0 \delta z_0 \\ + b'_0 \delta y'_0 + c'_0 \delta z'_0 \end{array} \right\} = 0$$

La 1^{re} ligne est nulle d'elle-même. Dans la 2^e, $\delta y'_0$ et $\delta z'_0$ ne sont pas indépendants; car l'eq. différentielle de la surface est

$$dz = p dx + q dy$$

$$\frac{dz}{dx} = p + q \frac{dy}{dx}$$

ou

$$z' = p + q y'$$

Donc, en A, on aura

$$z'_0 = p_0 + q_0 y'_0$$

c'est une relation entre z' et y' . - différentiant :

$$\delta z'_0 = q_0 \delta y'_0$$

Reportant dans la 2^e ligne de l'eq. aux limites :

$$(b'_0 + c'_0 q_0) \delta y'_0 = 0$$

Donc

$$\left. \begin{array}{l} b'_0 + c'_0 q_0 = 0 \\ z'_0 = p_0 + q_0 y'_0 = 0 \end{array} \right\} 2 \text{ eq.}$$

Ainsi il y en aurait encore 2 pour la limite 2.
Ainsi il y a deux équations de condition.

Si V est du 1^{er} ordre, il n'y a plus d'équation de condition.

On pourrait se donner certaines autres conditions. Par exemple : toutes les courbes qui aboutissent au point B doivent former avec la base des Z un angle invariable. alors, soit γ cet angle. on a en général

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

telle est la condition, $\cos \gamma$ étant constant. Prenons la variation :

$$0 = \delta z' \sqrt{1+y'^2+z'^2} - z' \frac{y' \delta y' + z' \delta z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0$$

Donc on obtient

$$\delta z' = \frac{z' y'}{1+y'^2} \delta y'$$

Si on reporte dans 414. aux limites, qui, on le sait, se réduisent à

$$b' \delta y' + c' \delta z' = 0$$

et si on reporte à zéro le coefficient de $\delta y'$, on a

$$b' + \frac{c' z' y'}{1+y'^2} = 0$$

qui, avec

$$\cos \gamma = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

donne ainsi encore 2-^{es} eq. de condition.

Ainsi le nombre des Equations se maintient toujours.

Enfin, il paraît se faire qu'il n'y ait pas d'indépendance entre les variations de A et de B : alors el Eq. aux limites ne se partagent pas en deux.

Par exemple : La courbe cherchée étant plane, les éléments extrêmes doivent former entre eux un angle constant.

$$ATB = \text{const.}, \quad \nabla_y ATB = 0.$$

$$K = \frac{y'_1 - y'_0}{1 + y'_1 y'_0}$$

Pour les variations aux limites ne sont plus indépendantes, et l'on a

$$\delta y'_1 = M \delta y'_0$$

Pour je ne pourrais plus poser

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

De même : Si la distance rectiligne AB , dans l'espace, devait être constante : on aurait

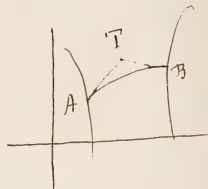
$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = l^2$$

Différenciant, on substituerait dans el Eq.

$$A_1 - A_0 = 0$$

et l'on égalerait à zéro les Coefficients des Variations Testantes.

on aurait Incontinent le nombre d'Eq. nécessaires.



Remarque. - Supposons que tout se passe dans un plan. - on a à intégrer el Eq. indéfinie

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots = 0$$

Si V est du 2^e ordre, il reste

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

Il y a un cas où cette Eq. est immédiatement intégrable.

C'est celui où $V = f(x, y', y'')$, et ne contient pas y .

alors, N manque, puisque $N = \frac{dV}{dy}$. Il reste

$$- \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$P - \frac{dQ}{dx} = C$$

et l'on a ainsi immédiatement une Intégrale Première.

Il y a un second cas: c'est celui où V ne contient pas la variable indépendante x .

alors en effet, $M = 0$, et l'on a

$$dV = N dy + P dy' + Q dy''$$

avec

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}$$

éliminons N :

$$dV = P dy' + \frac{dP}{dx} dy + Q dy'' - \frac{d^2Q}{dx^2} dy$$

$$= d(Py') + d\left(Qy'' - \frac{dQ}{dx} y'\right)$$

où

$$V = C' + Py' + Qy'' - \frac{dQ}{dx} y'$$

et il est évident que l'ordre est abaissé.

Let x, y, z be any three numbers
 such that $x + y + z = 0$
 and $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 then $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \frac{1}{2}$
 and $x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}$
 and $x^6 + y^6 + z^6 = \frac{1}{8}$
 and $x^8 + y^8 + z^8 = \frac{1}{16}$
 and $x^{10} + y^{10} + z^{10} = \frac{1}{32}$
 and $x^{12} + y^{12} + z^{12} = \frac{1}{64}$
 and $x^{14} + y^{14} + z^{14} = \frac{1}{128}$
 and $x^{16} + y^{16} + z^{16} = \frac{1}{256}$
 and $x^{18} + y^{18} + z^{18} = \frac{1}{512}$
 and $x^{20} + y^{20} + z^{20} = \frac{1}{1024}$
 and $x^{22} + y^{22} + z^{22} = \frac{1}{2048}$
 and $x^{24} + y^{24} + z^{24} = \frac{1}{4096}$
 and $x^{26} + y^{26} + z^{26} = \frac{1}{8192}$
 and $x^{28} + y^{28} + z^{28} = \frac{1}{16384}$
 and $x^{30} + y^{30} + z^{30} = \frac{1}{32768}$
 and $x^{32} + y^{32} + z^{32} = \frac{1}{65536}$
 and $x^{34} + y^{34} + z^{34} = \frac{1}{131072}$
 and $x^{36} + y^{36} + z^{36} = \frac{1}{262144}$
 and $x^{38} + y^{38} + z^{38} = \frac{1}{524288}$
 and $x^{40} + y^{40} + z^{40} = \frac{1}{1048576}$
 and $x^{42} + y^{42} + z^{42} = \frac{1}{2097152}$
 and $x^{44} + y^{44} + z^{44} = \frac{1}{4194304}$
 and $x^{46} + y^{46} + z^{46} = \frac{1}{8388608}$
 and $x^{48} + y^{48} + z^{48} = \frac{1}{16777216}$
 and $x^{50} + y^{50} + z^{50} = \frac{1}{33554432}$
 and $x^{52} + y^{52} + z^{52} = \frac{1}{67108864}$
 and $x^{54} + y^{54} + z^{54} = \frac{1}{134217728}$
 and $x^{56} + y^{56} + z^{56} = \frac{1}{268435456}$
 and $x^{58} + y^{58} + z^{58} = \frac{1}{536870912}$
 and $x^{60} + y^{60} + z^{60} = \frac{1}{1073741824}$
 and $x^{62} + y^{62} + z^{62} = \frac{1}{2147483648}$
 and $x^{64} + y^{64} + z^{64} = \frac{1}{4294967296}$
 and $x^{66} + y^{66} + z^{66} = \frac{1}{8589934592}$
 and $x^{68} + y^{68} + z^{68} = \frac{1}{17179869184}$
 and $x^{70} + y^{70} + z^{70} = \frac{1}{34359738368}$
 and $x^{72} + y^{72} + z^{72} = \frac{1}{68719476736}$
 and $x^{74} + y^{74} + z^{74} = \frac{1}{137438953472}$
 and $x^{76} + y^{76} + z^{76} = \frac{1}{274877906944}$
 and $x^{78} + y^{78} + z^{78} = \frac{1}{549755813888}$
 and $x^{80} + y^{80} + z^{80} = \frac{1}{1099511627776}$
 and $x^{82} + y^{82} + z^{82} = \frac{1}{2199023255552}$
 and $x^{84} + y^{84} + z^{84} = \frac{1}{4398046511104}$
 and $x^{86} + y^{86} + z^{86} = \frac{1}{8796093022208}$
 and $x^{88} + y^{88} + z^{88} = \frac{1}{17592186044416}$
 and $x^{90} + y^{90} + z^{90} = \frac{1}{35184372088832}$
 and $x^{92} + y^{92} + z^{92} = \frac{1}{70368744177664}$
 and $x^{94} + y^{94} + z^{94} = \frac{1}{140737488355328}$
 and $x^{96} + y^{96} + z^{96} = \frac{1}{281474976710656}$
 and $x^{98} + y^{98} + z^{98} = \frac{1}{562949953421312}$
 and $x^{100} + y^{100} + z^{100} = \frac{1}{1125899906842624}$
 and $x^{102} + y^{102} + z^{102} = \frac{1}{2251799813685248}$
 and $x^{104} + y^{104} + z^{104} = \frac{1}{4503599627370496}$
 and $x^{106} + y^{106} + z^{106} = \frac{1}{9007199254740992}$
 and $x^{108} + y^{108} + z^{108} = \frac{1}{18014398509481984}$
 and $x^{110} + y^{110} + z^{110} = \frac{1}{36028797018963968}$
 and $x^{112} + y^{112} + z^{112} = \frac{1}{72057594037927936}$
 and $x^{114} + y^{114} + z^{114} = \frac{1}{144115188075855872}$
 and $x^{116} + y^{116} + z^{116} = \frac{1}{288230376151711744}$
 and $x^{118} + y^{118} + z^{118} = \frac{1}{576460752303423488}$
 and $x^{120} + y^{120} + z^{120} = \frac{1}{1152921504606846976}$
 and $x^{122} + y^{122} + z^{122} = \frac{1}{2305843009213693952}$
 and $x^{124} + y^{124} + z^{124} = \frac{1}{4611686018427387904}$
 and $x^{126} + y^{126} + z^{126} = \frac{1}{9223372036854775808}$
 and $x^{128} + y^{128} + z^{128} = \frac{1}{18446744073709551616}$
 and $x^{130} + y^{130} + z^{130} = \frac{1}{36893488147419103232}$
 and $x^{132} + y^{132} + z^{132} = \frac{1}{73786976294838206464}$
 and $x^{134} + y^{134} + z^{134} = \frac{1}{147573952589676412928}$
 and $x^{136} + y^{136} + z^{136} = \frac{1}{295147905179352825856}$
 and $x^{138} + y^{138} + z^{138} = \frac{1}{590295810358705651712}$
 and $x^{140} + y^{140} + z^{140} = \frac{1}{1180591620717411303424}$
 and $x^{142} + y^{142} + z^{142} = \frac{1}{2361183241434822606848}$
 and $x^{144} + y^{144} + z^{144} = \frac{1}{4722366482869645213696}$
 and $x^{146} + y^{146} + z^{146} = \frac{1}{9444732965739290427392}$
 and $x^{148} + y^{148} + z^{148} = \frac{1}{18889465931478580854784}$
 and $x^{150} + y^{150} + z^{150} = \frac{1}{37778931862957161709568}$
 and $x^{152} + y^{152} + z^{152} = \frac{1}{75557863725914323419136}$
 and $x^{154} + y^{154} + z^{154} = \frac{1}{151115727451828646838272}$
 and $x^{156} + y^{156} + z^{156} = \frac{1}{302231454903657293676544}$
 and $x^{158} + y^{158} + z^{158} = \frac{1}{604462909807314587353088}$
 and $x^{160} + y^{160} + z^{160} = \frac{1}{1208925819614629174706176}$
 and $x^{162} + y^{162} + z^{162} = \frac{1}{2417851639229258349412352}$
 and $x^{164} + y^{164} + z^{164} = \frac{1}{4835703278458516698824704}$
 and $x^{166} + y^{166} + z^{166} = \frac{1}{9671406556917033397649408}$
 and $x^{168} + y^{168} + z^{168} = \frac{1}{19342813113834066795298816}$
 and $x^{170} + y^{170} + z^{170} = \frac{1}{38685626227668133590597632}$
 and $x^{172} + y^{172} + z^{172} = \frac{1}{77371252455336267181195264}$
 and $x^{174} + y^{174} + z^{174} = \frac{1}{154742504910672534362390528}$
 and $x^{176} + y^{176} + z^{176} = \frac{1}{309485009821345068724781056}$
 and $x^{178} + y^{178} + z^{178} = \frac{1}{618970019642690137449562112}$
 and $x^{180} + y^{180} + z^{180} = \frac{1}{1237940039285380274899124224}$
 and $x^{182} + y^{182} + z^{182} = \frac{1}{2475880078570760549798248448}$
 and $x^{184} + y^{184} + z^{184} = \frac{1}{4951760157141521099596496896}$
 and $x^{186} + y^{186} + z^{186} = \frac{1}{9903520314283042199192993792}$
 and $x^{188} + y^{188} + z^{188} = \frac{1}{19807040628566084398385987584}$
 and $x^{190} + y^{190} + z^{190} = \frac{1}{39614081257132168796771975168}$
 and $x^{192} + y^{192} + z^{192} = \frac{1}{79228162514264337593543950336}$
 and $x^{194} + y^{194} + z^{194} = \frac{1}{158456325028528675187087900672}$
 and $x^{196} + y^{196} + z^{196} = \frac{1}{316912650057057350374175801344}$
 and $x^{198} + y^{198} + z^{198} = \frac{1}{633825300114114700748351602688}$
 and $x^{200} + y^{200} + z^{200} = \frac{1}{1267650600228229401496703205376}$
 and $x^{202} + y^{202} + z^{202} = \frac{1}{2535301200456458802993406410752}$
 and $x^{204} + y^{204} + z^{204} = \frac{1}{5070602400912917605986812821504}$
 and $x^{206} + y^{206} + z^{206} = \frac{1}{10141204801825835211973625643008}$
 and $x^{208} + y^{208} + z^{208} = \frac{1}{20282409603651670423947251286016}$
 and $x^{210} + y^{210} + z^{210} = \frac{1}{40564819207303340847894502572032}$
 and $x^{212} + y^{212} + z^{212} = \frac{1}{81129638414606681695789005144064}$
 and $x^{214} + y^{214} + z^{214} = \frac{1}{162259276829213363391578010288128}$
 and $x^{216} + y^{216} + z^{216} = \frac{1}{324518553658426726783156020576256}$
 and $x^{218} + y^{218} + z^{218} = \frac{1}{649037107316853453566312041152512}$
 and $x^{220} + y^{220} + z^{220} = \frac{1}{1298074214633706907132624082305024}$
 and $x^{222} + y^{222} + z^{222} = \frac{1}{2596148429267413814265248164610048}$
 and $x^{224} + y^{224} + z^{224} = \frac{1}{5192296858534827628530496329220096}$
 and $x^{226} + y^{226} + z^{226} = \frac{1}{10384593717069655257060992658440192}$
 and $x^{228} + y^{228} + z^{228} = \frac{1}{20769187434139310514121985316880384}$
 and $x^{230} + y^{230} + z^{230} = \frac{1}{41538374868278621028243970633760768}$
 and $x^{232} + y^{232} + z^{232} = \frac{1}{83076749736557242056487941267521536}$
 and $x^{234} + y^{234} + z^{234} = \frac{1}{166153499473114484112975882535043072}$
 and $x^{236} + y^{236} + z^{236} = \frac{1}{332306998946228968225951765070086144}$
 and $x^{238} + y^{238} + z^{238} = \frac{1}{664613997892457936451903530140172288}$
 and $x^{240} + y^{240} + z^{240} = \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576}$
 and $x^{242} + y^{242} + z^{242} = \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152}$
 and $x^{244} + y^{244} + z^{244} = \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304}$
 and $x^{246} + y^{246} + z^{246} = \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608}$
 and $x^{248} + y^{248} + z^{248} = \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216}$
 and $x^{250} + y^{250} + z^{250} = \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432}$
 and $x^{252} + y^{252} + z^{252} = \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864}$
 and $x^{254} + y^{254} + z^{254} = \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728}$
 and $x^{256} + y^{256} + z^{256} = \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456}$
 and $x^{258} + y^{258} + z^{258} = \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912}$
 and $x^{260} + y^{260} + z^{260} = \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824}$
 and $x^{262} + y^{262} + z^{262} = \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648}$
 and $x^{264} + y^{264} + z^{264} = \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296}$
 and $x^{266} + y^{266} + z^{266} = \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592}$
 and $x^{268} + y^{268} + z^{268} = \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184}$
 and $x^{270} + y^{270} + z^{270} = \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368}$
 and $x^{272} + y^{272} + z^{272} = \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736}$
 and $x^{274} + y^{274} + z^{274} = \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472}$
 and $x^{276} + y^{276} + z^{276} = \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944}$
 and $x^{278} + y^{278} + z^{278} = \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888}$
 and $x^{280} + y^{280} + z^{280} = \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776}$
 and $x^{282} + y^{282} + z^{282} = \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552}$
 and $x^{284} + y^{284} + z^{284} = \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104}$
 and $x^{286} + y^{286} + z^{286} = \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208}$
 and $x^{288} + y^{288} + z^{288} = \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416}$
 and $x^{290} + y^{290} + z^{290} = \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832}$
 and $x^{292} + y^{292} + z^{292} = \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664}$
 and $x^{294} + y^{294} + z^{294} = \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328}$
 and $x^{296} + y^{296} + z^{296} = \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656}$
 and $x^{298} + y^{298} + z^{298} = \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312}$
 and $x^{300} + y^{300} + z^{300} = \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624}$
 and $x^{302} + y^{302} + z^{302} = \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248}$
 and $x^{304} + y^{304} + z^{304} = \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496}$
 and $x^{306} + y^{306} + z^{306} = \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992}$
 and $x^{308} + y^{308} + z^{308} = \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984}$
 and $x^{310} + y^{310} + z^{310} = \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968}$
 and $x^{312} + y^{312} + z^{312} = \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936}$
 and $x^{314} + y^{314} + z^{314} = \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872}$
 and $x^{316} + y^{316} + z^{316} = \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744}$
 and $x^{318} + y^{318} + z^{318} = \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488}$
 and $x^{320} + y^{320} + z^{320} = \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976}$
 and $x^{322} + y^{322} + z^{322} = \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952}$
 and $x^{324} + y^{324} + z^{324} = \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904}$
 and $x^{326} + y^{326} + z^{326} = \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808}$
 and $x^{328} + y^{328} + z^{328} = \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616}$
 and $x^{330} + y^{330} + z^{330} = \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232}$
 and $x^{332} + y^{332} + z^{332} = \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464}$
 and $x^{334} + y^{334} + z^{334} = \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928}$
 and $x^{336} + y^{336} + z^{336} = \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856}$
 and $x^{338} + y^{338} + z^{338} = \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712}$
 and $x^{340} + y^{340} + z^{340} = \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424}$
 and $x^{342} + y^{342} + z^{342} = \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848}$
 and $x^{344} + y^{344} + z^{344} = \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696}$
 and $x^{346} + y^{346} + z^{346} = \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392}$
 and $x^{348} + y^{348} + z^{348} = \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784}$
 and $x^{350} + y^{350} + z^{350} = \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568}$
 and $x^{352} + y^{352} + z^{352} = \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136}$
 and $x^{354} + y^{354} + z^{354} = \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272}$
 and $x^{356} + y^{356} + z^{356} = \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544}$
 and $x^{358} + y^{358} + z^{358} = \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088}$
 and $x^{360} + y^{360} + z^{360} = \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176}$
 and $x^{362} + y^{362} + z^{362} = \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352}$
 and $x^{364} + y^{364} + z^{364} = \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704}$
 and $x^{366} + y^{366} + z^{366} = \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408}$
 and $x^{368} + y^{368} + z^{368} = \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816}$
 and $x^{370} + y^{370} + z^{370} = \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632}$
 and $x^{372} + y^{372} + z^{372} = \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264}$
 and $x^{374} + y^{374} + z^{374} = \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528}$
 and $x^{376} + y^{376} + z^{376} = \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056}$
 and $x^{378} + y^{378} + z^{378} = \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112}$
 and $x^{380} + y^{380} + z^{380} = \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224}$
 and $x^{382} + y^{382} +$

393.

394.

395.

Complément.

396.

—

397.

Compléments
de
Calcul Différentiel .

398.

Sur les Maxima & Minima.

Problème. — Trouver, entre deux points lumineux, le point le moins éclairé.

Soient a & b les Intensités, d la distance des deux points, & x la distance du point observé au 1^{er} point lumineux. La quantité d'éclairage reçue par ce point est en général

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d-x)^2}$$

Cette fonction a-t-elle un minimum? oui, car si nous faisons croître x de 0 à d , elle partira d'une valeur infinie à une valeur également infinie: il y a donc dans l'intervalle un moins un minimum. — Pour le trouver, je prends la dérivée & je l'égalé à zéro:

$$\frac{b}{(d-x)^3} - \frac{a}{x^3} = 0$$

d'où

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$x = \frac{d}{1 + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$$

Pour reconnaître si c'est là réellement un minimum, je prends la dérivée seconde.

Rem. — on trouvera de la même manière le point le moins éclairé sur la droite qui joint deux points calorifiques; la loi physique est en effet la même.

$$\frac{3a}{x^4} + \frac{3b}{(d-x)^4} = \frac{3}{(d-x)^4} \left[b + \frac{a(d-x)^4}{x^4} \right]$$

on voit d'ailleurs, sous l'une ou l'autre de ces formes, que pour la valeur de x trouvée, $f''(x)$ est > 0 . c'est donc un minimum.

Problème. — Soit la courbe $y = b + (x-a)^{\frac{2}{3}}$

Vois d'autres exemples, p. 594.

La dérivée première est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} (x-a)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-a}}$$

Si j'égalais cette dérivée à zéro, je ne trouverais que des points à l'infini qui ne répondent point à la question. Mais, en l'égalant à l'infini, j'obtiens la valeur $x=a$, pour laquelle la fonction proposée est maximum ou minimum.

Je ne puis ici, pour distinguer lequel des deux états elle acquiert, faire usage

On observe toujours : car la théorie exige que ces dérivées soient finies. Je considère donc les signes de $\frac{dy}{dx}$ pour des valeurs de x voisines de a :

$$\text{Pour } x < a, \frac{dy}{dx} < 0 ; \text{ pour } x > a, \frac{dy}{dx} > 0$$

La dérivée est croissante. La valeur $x=a$ doit donc acquiescer un minimum à la fonction proposée. C'est à dire qu'on voit d'ailleurs sur cette fonction elle-même.

Cad, en y remplaçant x par $a \pm h$, on a

$$y = b \pm \sqrt[3]{h^3}$$

par conséquent la différence $f(a+h) - f(a)$ est constamment positive quel que soit le signe de h : car elle est $\sqrt[3]{h^3}$.

Le minimum trouvé en égalant à l'infini la dérivée caractérise un point de retournement; la tangente étant parallèle à l'axe des y .

Problème. Trouver si la fonction x^x a un maximum ou un minimum.

Je substitue à cette fonction son logarithme :

$$x \ln x$$

et j'en prends la dérivée

$$\ln x + 1$$

En l'égalant à zéro, j'obtiens

$$\ln x = -1$$

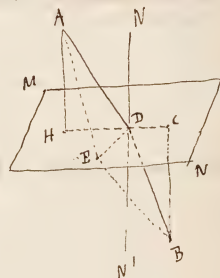
$$x = \frac{1}{e}$$

cette valeur donne un minimum, car elle rend positive la dérivée seconde $\frac{1}{x^2}$.

Problème. Deux points, A et B sont situés dans deux milieux séparés par une surface plane MN. Un mobile se meut dans le 1^{er} milieu avec une vitesse u , dans le 2^d. avec une vitesse v . Quel chemin doit-il suivre pour aller de A en B dans le temps le plus court possible ?

Le chemin se compose évidemment de deux lignes droites, et ces lignes doivent être contenues dans le plan des perp. abaissés de A et B sur MN. Car supposons que le chemin du plus prompt passe par le plan en un point E hors de HC : si j'abaisse ED perp. sur HC, j'ai d'après le théorème du 3^e perp. que j'aurai $AE > AD$ et $BE > BD$: donc le chemin AEB sera perçu en moins de temps que le chemin ADB. Il est d'ailleurs évident que le point D est compris entre H et C.

Cela posé, soit $AH = a$, $HC = d$, $BC = b$, $HD = x$. Maintenant pour le temps employé pour le mobile pour aller de A en D et de D en B



$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v}$$

et il faut chercher le minimum de cette quantité : pour cela, je pose

$$\frac{x}{u\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-d}{v\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$$

au lieu de résoudre cette eq. par rapport à x , j'en mets sous sa forme

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} v = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} u$$

puis j'observe que $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin HAD = \sin ADN$, et que $\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin CBD = \sin BDN$.

Donc

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin ADN}{\sin BDN}$$

Le rapport du sinus est, dans le cas du minimum, égal au rapport de réfraction du 2^e milieu par rapport au 1^er , si l'on suppose que A est un point lumineux.

Maxima et Minima Des fonctions Implicites.

Soit

$$f(x, y, z, u)$$

une fonction de 4 variables liées entre elles par les 3 eq.

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = 0 & (1) \\ \varphi_1(x, y, z, u) = 0 & (2) \\ \varphi_2(x, y, z, u) = 0 & (3) \end{cases}$$

par suite, nous pouvons considérer x comme la seule variable, et les 3 autres comme des fonctions de celle-ci, et par suite, $f(x, y, z, u)$ sera fonction de la seule variable x . Par suite, les conditions du maximum ou du minimum de la fonction sont celles que l'on connaît. — Je prendrai donc la dérivée totale par rapport à x de la fonction, et j'égalerais à zéro. J'aurai

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = 0 \quad (4)$$



Mais cette équation contient des quantités inconnues $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ qui peuvent se déterminer en différentiant les équations (1), (2), (3).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dq}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dq}{du} \frac{du}{dx} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_1}{dx} + \dots = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_2}{dx} + \dots = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

en éliminant les 3 quantités en question, j'aurai

$$\sqrt[3]{(x, y, z, u)} = 0$$

qui, ajoutée aux Eq. (1), (2) et (3) déterminera les valeurs de x, y, z, u répondant aux maxima et minima. En substituant ces valeurs dans f , on obtient les maxima et minima de cette fonction.

Pour déterminer si ces valeurs sont réellement des maxima ou des minima, il faudrait examiner les changements de signe que subit l'Eq. (4) quand x, y, z, u atteignent et dépassent les valeurs en question. Mais cette marche sera en général très-pénible, et l'on peut substituer l'emploi de la dérivée seconde totale.

On fait trouver cette dérivée seconde. Elle contiendra les quantités $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, qu'on déterminera en différenciant par rapport à x les Eq. (5), (6) et (7). Par l'élimination de ces 3 quantités, on obtiendra une Eq. fonction de x, y, z, u , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, qui, jointe aux équations (5), (6) et (7) déterminera, par les signes qu'elle prendra, si les valeurs données pour x, y, z, u conviennent.

Sont tellement à Du maxima ou à Du minima.

Problème. Trouver la distance minima d'un point Donné à une courbe d'eq:

$$f(x, y) = 0$$

Sont a et b les coordonnées Du point m , x et y celles Du point d'inter. question De la droite minima avec la courbe.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2$$

et la fonction dont il faut trouver le minimum. Je différencie par rapport à x , en considérant y comme fonction D x , et j'égalé à zéro. J'obtiens:

$$x-a + (y-b) \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$$

ce qui montre que la droite est Normale à la courbe.

Supposons que la courbe soit un cercle:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

alors $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, et la relation Devient

$$\frac{x}{y} = \frac{x-a}{y-b}$$

$$y = \frac{b}{a} x$$

et cette eq. jointe à celle Du cercle, Détermine Des valeurs De x et y correspondantes au maximum et au minimum.

Si l'on prenait le point m sur l'axe Des x , on trouverait

$$MP^2 = y^2 + (x-a)^2 = R^2 - 2ax + a^2$$

Dont la dérivée est

$$-2a$$

quantité constante. Le calcul montre donc ici ne peut indiquer le minimum ni le maximum. Et en effet, Dans le cas actuel, le calcul ne peut nous Donner ce même résultat que dans le cas général. La ligne MP est bien minima relativement à toute autre ligne MP' menée Du point m à un point De la circonférence. Mais la définition analytique Du minimum exige que la valeur De x pour laquelle il a lieu soit comprise entre Des valeurs immédiatement inférieures et Des valeurs immédiatement supérieures: ici au contraire, au Delà de la valeur De x qui donne le minimum, il n'y a plus que Des valeurs imaginaires.

on voit donc bien pourquoi le calcul ne donne pas immédiatement le résultat.
 2. Qui immédiatement: car la solution est contenue dans le résultat obtenu. Nous
 avons trouvé pour la dérivée, $-2x$, quantité négative, quel que soit x : donc la
 fonction, ou la longueur m , décroît depuis que la plus petite valeur a été don-
 née à x , jusqu'à ce qu'elle atteigne la plus grande, en sorte qu'elle est maxima
 pour $x = -R$ et minima pour $x = R$.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions ayant
 un nombre limité de maxima et de minima. Mais il en est,
 comme le Cosinus et le sinus, qui possèdent une infinité de fois
 pour les mêmes valeurs, et présentent une infinité de Maxima
 et de minima.

Le problème suivant en donne un exemple.

Problème. — Par un point A passe un arc AmB de longueur cons-
 tante, mais décrit avec un rayon variable. on demande le Maximum et
 le minimum du segment compris entre cet arc et la corde.

Le triangle AOB étant fixe, en désignant le rayon variable par x ,
 à $\frac{x^2}{2} \sin \frac{l}{x}$, et le secteur circulaire AmB à $\frac{1}{2} lx$, on a

$$\text{Segm. } AmB = \frac{1}{2} lx - \frac{x^2}{2} \sin \frac{l}{x} = y$$

Où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} l - x \sin \frac{l}{x} + \frac{x^2}{2} \cos \frac{l}{x} \times \frac{l}{x^2} = 0$$

$$\cos \frac{l}{2x} \left\{ l \cos \frac{l}{2x} - 2x \sin \frac{l}{2x} \right\} = 0$$

Cette eq. peut être satisfaite de plusieurs manières:

1°. en posant $\cos \frac{l}{2x} = 0$, d'où $\frac{l}{2x} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, et

$$x = \frac{l}{(2k+1)\pi}$$

Ainsi nous avons ainsi pour x une infinité de valeurs. Correspondent-elles à des
 maxima ou à des minima? Pour m'en rendre compte, je prends la dérivée seconde, qui
 pour la valeur particulière que nous venons de trouver pour x , sera évidemment

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2l}{x^3} \left(-\sin \frac{l}{2x} \right) \left(-2x \sin \frac{l}{2x} \right) = -\frac{l}{x^2} \sin \frac{l}{2x}$$



409.

quantité négative lorsqu'on y remplacera x par sa valeur $\frac{l}{(2k+1)\pi}$. Par conséquent les valeurs correspondantes de y sont des maxima. On forme le tableau

$$x = \frac{l}{\pi} \quad \frac{l}{3\pi} \quad \frac{l}{5\pi} \quad \frac{l}{7\pi} \quad \dots \quad \frac{l}{(2k+1)\pi}$$

$$y = \frac{l^2}{2\pi} \quad \frac{l^2}{6\pi} \quad \frac{l^2}{10\pi} \quad \frac{l^2}{14\pi} \quad \dots \quad \frac{l^2}{2(2k+1)\pi}$$

Parmi ces valeurs de y , la plus grande s'obtient évidemment en faisant $k=0$, et alors $\frac{l}{x} = \pi$, c. ad. laquelle qui renferme le segment est une demi-circonférence.

Mais une fonction continue comme celle dont nous nous occupons ne peut présenter qu'une infinité de maxima sous le voile d'un nombre de minima compris dans l'intervalle. et en effet, on peut satisfaire à l'équation obtenue

2°. en posant :

$$l \cos \frac{l}{2x} - 2x \sin \frac{l}{2x} = 0$$

$$\text{Donc } \cot \frac{l}{2x} = \frac{l}{2x}$$

on voit facilement que la 1^{re} valeur qui satisfait à cette équation est $\frac{l}{2x} = 0$, qui la seconde et comprise entre π et $\frac{3}{2}\pi$, la 3^e entre 2π et $\frac{5}{2}\pi$, la 4^e entre 3π et $\frac{7}{2}\pi$, etc. D'où il résulte que les valeurs correspondantes de x sont d'abord ∞ , puis comprises entre $\frac{l}{\pi}$ et $\frac{l}{3\pi}$, etc. c'est-à-dire entre les valeurs de x qui donnent les maxima.

Maintenant, ces valeurs correspondent bien à des minima. Car, si nous prenons la dérivée seconde de la fonction y , on trouve que l'hypothèse $\cot \frac{l}{2x} = \frac{l}{2x}$ la réduit à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{l}{x} \sin \frac{l}{2x}$$

quantité manifestement positive.

Problème analogue pour les Calottes Sphériques.

Formes Singulières
Des Fonctions.

1°. Forme $\frac{0}{0}$.

Lorsqu'on suppose que toutes les dérivées, jusqu'à celle qui ne s'annulent pas simultanément, soient finies, de façon que le développement de Taylor soit possible.

Si l'on n'était pas ainsi, on chercherait à développer les deux fonctions $F(a+h)$ et $f(a+h)$ suivant les puissances croissantes, mais quelconques d'ailleurs, de h . Soit

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{A h^{\alpha} + B h^{\beta} + \dots}{A' h^{\alpha'} + B' h^{\beta'} + \dots}$$

alors : si $\alpha = \alpha'$, la limite est $\frac{A}{A'}$.

" $\alpha > \alpha'$ " 0

" $\alpha < \alpha'$ " ∞

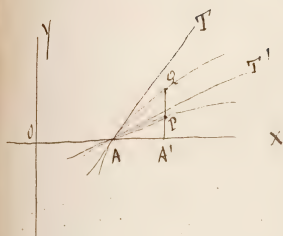
Il peut arriver que le symbole $\frac{0}{0}$ se présente pour une valeur infinie de la variable. Supposons qu'il en soit ainsi. Nous posons $x = \frac{1}{y}$, et alors, par le même raisonnement, nous avons

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(\frac{1}{y})}{f(\frac{1}{y})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(\frac{1}{y})}{f'(\frac{1}{y})}$$

ce qui revient à

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

de sorte que la même règle s'applique encore.



on peut, par des considérations géométriques, se rendre compte de la manière dont le rapport des fonctions devient à la limite celui de leurs dérivées. — Soit $y = F(x)$ une courbe qui rencontre l'axe des abscisses au point A . ($OA = a$) : et $y = f(x)$ une 2^e courbe rencontrant ox au même point. Je considère la donnée relative au x l'abscisse $OA' = a + h$.

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{A'Q}{A'P} = \frac{Tg. QAA'}{Tg. PAA'}$$

Si A' tend vers A , les sécantes AQ et AP tendent à devenir les tangentes en A , et, à la limite,

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{Tg. TAx}{Tg. T'Ax} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$$

2^o. Soit $\frac{\infty}{\infty}$.

M^r. Cauchy démontre de la manière suivante qu'on peut appliquer immédiatement aux fonctions dont le rapport se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ les règles données pour le cas de $\frac{0}{0}$.

Distinguons 3 cas : la limite est finie et différente de zéro, elle est nulle, elle est infinie.

1^o. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = A$. on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{F(x)}}$$

et alors, nous pourrions appliquer la règle : la limite de ce rapport est égale à la limite du rapport des dérivées. Donc on aura

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) \cdot F(x)^2}{F'(x) \cdot f(x)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x)}{f(x)} \right]^2 \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

ou bien

$$A = A^2 \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

d'où

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

2°. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = 0$. Je dis qu'alors la limite du rapport des dérivées est également zéro. Je considère avec M^r. Liouville la fonction

$$\frac{F(x)}{f(x)} + g = \frac{F(x) + g f(x)}{f(x)}$$

laquelle aura pour limite g . Puisque sa limite est finie et différente de zéro, je retombe dans le 1^{er} cas. J'ai donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) + g f(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x) + g f'(x)}{f'(x)}$$

c.à.d.

$$g = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{f'(x)} + g$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{f'(x)} = 0 \quad \text{c.à.d.}$$

3°. Soit enfin $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \infty$. Nous aurons

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = 0$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{f'(x)} = \infty$$

La limite du rapport de la fonction est donc encore la même que celle du rapport de leurs dérivées.

Log.

Exemple Du cas $\frac{0}{0}$.

Soit à trouver la vraie valeur De

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$$

pour $x=1$. Mais ne pouvons appliquer ici la règle qui a été donnée: car elle exige que chacune des fonctions soit continue dans le voisinage de la valeur particulière attribuée à x : et ici, pour toute valeur de x moindre que 1, le numérateur est l'impossible.

Le remplaçons par $1+h$.

$$\frac{(h^2+2h)^{\frac{1}{2}}}{1+h^{\frac{1}{2}}-(1+h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+h^{\frac{1}{2}}-(1+h)^{\frac{1}{2}}}$$

Je développe par la formule de Newton, et j'obtiens

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{h}{4} - \frac{1}{1.2.4} \cdot \frac{h^2}{4} + \dots \right]}{1 - \left[1 + \frac{h}{4} - \frac{1}{1.2.4} h^2 + \dots \right] + h^{\frac{1}{2}}}$$

Supprimant les termes qui se détruisent, et le facteur commun $h^{\frac{1}{2}}$, j'ai

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{h}{4} - \frac{1}{1.2.4} \cdot \frac{h^2}{4} + \dots \right]}{1 - \left[\frac{h^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{1.2.4} \cdot h^{\frac{3}{2}} + \dots \right]}$$

Le limite est donc $4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ ou $4\sqrt{2}$.

ou bien de développer, on pourrait multiplier haut et bas par $1+\sqrt{h}+\sqrt{h}^2$, supprimer \sqrt{h} facteur commun, et faire $h=0$.

Tangenten aux Courbes.

on sait que l'Eq. générale de la tangente à une courbe plane

$$f(x, y) = 0$$

est

$$y \frac{df}{dy} + x \frac{df}{dx} = y \frac{df}{dy} + x \frac{df}{dx}$$

Si l'Eq. était

$$f(x, y) = c$$

c étant un paramètre variable, de sorte qu'elle représenterait une infinité de courbes de même espèce, l'Eq. de la tangente ne serait point modifiée. Mais si, dans cette Eq. de la tangente, nous considérons x et y comme les coordonnées α et β d'un point particulier du plan, et x, y comme les constantes, la même Eq.

$$\beta \frac{df}{dy} + \alpha \frac{df}{dx} = y \frac{df}{dy} + x \frac{df}{dx}$$

$$f(x, y) = c$$

Déterminent les coordonnées x et y du point de contact pour chaque valeur particulière attribuée à c . Si donc nous laissons c indéterminée, la 1^{re} Eq. qui en est indépendante, représentera le lieu des points de contact des tangentes menées du point α, β à toutes les courbes $f(x, y) = c$.

on démontrera aisément que cette Eq. est au plus du Degré $m-1$, m étant celui de f . En effet, le 1^{er} membre est évidemment du Degré $m-1$ au plus. Quant au second, on remarque qu'il est formé de termes de l'Eq. proposée multipliés respectivement par leur Degré : De sorte que si l'Eq. contient le terme $A x^p y^q$, le 1^{er} membre renferme $(p+q) A x^p y^q$. Nous pourrions donc écrire

$$mq + (m-1) q_1 + (m-2) q_2 + \dots$$

on représentant par q, q_1, q_2, \dots l'ensemble des termes de
Degré $m, m-1, m-2, \dots$, on a bien

$$m(q + q_1 + q_2 + \dots) - q_1 - 2q_2 - 3q_3 - \dots$$

Mais le multiplicateur de m est nul lui-même, puisque c'est
le 1^{er} membre de l'éq. de la courbe. Donc ce second membre est
en plus aussi du Degré $m-1$.

Si donc la courbe proposée est du second Degré, celle d'ailleurs
des points de contact est une droite : propriété remarquable des
courbes du second Degré données par l'éq. $f(x, y) = c$.

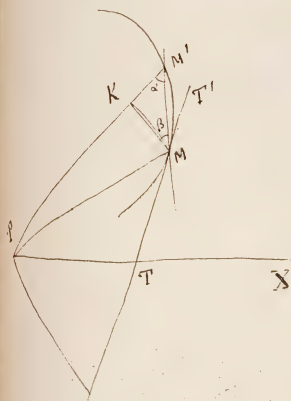
Tangentes en Coordonnées polaires.

La tangente se définit au moyen de l'angle qu'elle fait avec le
rayon vecteur mené au point de contact. On prend celui des
deux angles qui est compris entre le rayon vecteur et la partie
de la tangente qui est dirigée en sens contraire du mouvement du
rayon vecteur, celui-ci se mouvant de manière à augmenter
l'angle qu'il fait avec l'axe polaire.

Cherchons la valeur générale de cet angle.

La tangente au point M est la limite des positions succe-
sives de la sécante MM' lorsque le point M' se rapproche
indéfiniment de M : et l'angle cherché $\angle PMT$ est la limite
de l'angle $\angle PM'M$. Soit $\angle PM'M = \alpha$, et $\angle KMM' = \beta$, le
point K étant déterminé par un arc de cercle décrit
du pôle P avec PM pour rayon. Dans le triangle
 $\angle PMM'$, on a

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{KM}{KM'} = \frac{\frac{KM}{\text{arc } KM}}{\frac{KM'}{\text{arc } KM}}$$



Cherchons les limites. $\sin \alpha$ devient $\sin V$; β devient l'angle de la tangente MT' avec la tangente au cercle du rayon PM , c.à.d. le complément de V . Donc $\lim \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \operatorname{Tg} V$.
 Pour le second membre, le Numérateur devient 1; le dénominateur exprime le rapport de l'accroissement de l'arc de cercle PM au rayon vecteur à l'accroissement θ de l'arc de cercle décrit par le rayon vecteur, et si nous désignons par k l'accroissement du rayon, h celui de l'angle, rh sera celui de l'arc, et par suite la limite du rapport en question sera $\lim \frac{k}{rh}$. Donc enfin

$$\operatorname{Tg} V = \frac{1}{\lim \frac{k}{rh}}$$

et

$$\operatorname{Tg} V = r \cdot \lim \frac{h}{k} = r \frac{d\theta}{dr}$$

Cette démonstration semble exiger que le rayon vecteur aille en croissant. Mais il serait facile de l'adapter au cas contraire.

Voici d'ailleurs un mode de démonstration moins élégant, mais à l'abri de toute objection.

Le triangle PMT nous donne

$$V = \gamma - \theta$$

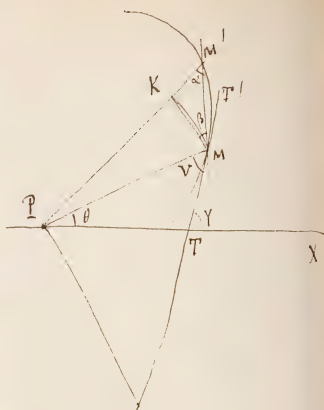
d'où

$$\operatorname{Tg} V = \frac{\operatorname{Tg} \gamma - \operatorname{Tg} \theta}{1 + \operatorname{Tg} \gamma \operatorname{Tg} \theta}$$

Si nous considérons la courbe comme rapportée à deux axes rectangulaires passant en P et dont l'un coïnciderait avec PX , nous aurions

$$\operatorname{Tg} \gamma = \frac{dy}{dx} \quad \operatorname{Tg} \theta = \frac{y}{x}$$

d'où



$$\nabla V = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \frac{dy}{dx}} = \frac{x dy - y dx}{x dx + y dy}$$

valleur que j'avais transformée au moyen des Relations

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

on en tire

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donc

$$x dx + y dy = r dr$$

ailleurs on a

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

donc

$$\frac{x dy - y dx}{r^2 \cos^2 \theta} = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$x dy - y dx = r^2 d\theta$$

et substituant,

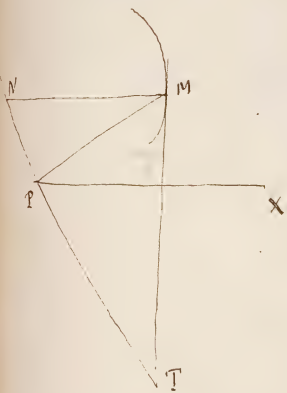
$$\nabla V = r \frac{d\theta}{dr}$$

on appelle Sous-Tangente la longueur Interceptée sur une Droite perp. au rayon vecteur entre le pôle et le point de rencontre avec la Tangente. Elle a pour valeur

$$S_t = TP = r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

on trouve aussi pour la Sous-Normale,

$$S_n = NP = r \cot \theta = \frac{dr}{d\theta}$$



Spirale d'Archimède.

$$r = a\theta$$

Cette courbe peut être considérée comme le lieu des positions successives d'un mobile s'avancant d'un mouvement uniforme, sur le rayon vecteur, en même temps que celui-ci, d'abord tracé sur une droite, s'élève et tourne uniformément autour du pôle. On voit qu'en effet dans un tel mouvement, la distance du mobile à l'origine, ou la longueur du rayon vecteur, est constamment proportionnelle à l'angle que fait celui-ci avec l'axe polaire.

Supposons qu'après une révolution entière, le mobile soit arrivé en A, et divisons la circonférence qui a pour rayon PA = l. on aura

$$a \cdot 2\pi = l \quad \text{d'où} \quad a = \frac{l}{2\pi}$$

et l'éq. de la courbe peut s'écrire

$$r = \frac{l}{2\pi} \theta$$

alors, prenant successivement $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, j'ai $r = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}$. Ce qui me donne les points P, a, b, c, de la courbe. — au-delà de la valeur $\theta = 2\pi$, il suffit, pour obtenir chaque tour de spirale, d'augmenter de l les rayons vecteurs du précédent. En effet, si l'on prend deux rayons vecteurs correspondants à des valeurs de θ qui diffèrent d'une circonférence, on a

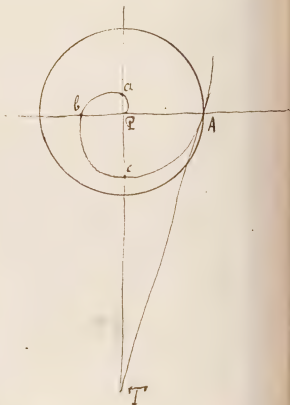
$$r = \frac{l}{2\pi} (2m\pi + \alpha)$$

$$r' = \frac{l}{2\pi} (2(m+1)\pi + \alpha)$$

d'où

$$r' - r = l$$

Cherchons la tangente en un point quelconque.



$$\text{Tg } \psi = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{2\pi} \theta \times \frac{2\pi}{l} = \theta$$

Nous aurons pour la sous-normale

$$S_n = \frac{l}{2\pi} = \text{const.}$$

et pour la sous-tangente,

$$S_t = \frac{l}{2\pi} \theta^2$$

Pour le point A, où $\theta = 2\pi$, $S_t = 2l\pi$ = la circonférence PA ;
TP = cette circonférence.

Quand $\theta = 2m\pi$, $S_t = m$ Circ. mil, c.à.d. m fois la circonférence qui a pour rayon le rayon vecteur actuel.

La construction suivante donne la tangente en un point quelconque. Soit M le point de la spirale, PA = l. Je décris la circf. de rayon l, et au point D où elle est rencontrée par le rayon vecteur du point M, je mène DS tangente au cercle. Je prends DS = arc DA ; je joins PS, je mène MK parallèle à DS et KI à PD. La droite MI est la tangente. Montrons qu'en effet l'angle DMI a pour tangente l'angle θ du rayon vecteur avec l'axe polaire. - on a

$$\text{Tg } \angle DMI = \frac{DI}{DM} = \frac{MK}{DM}$$

$$MK : DS :: PM : PD$$

$$MK : (2\pi - \theta)l :: \frac{l}{2\pi} \theta : l$$

$$MK = \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \theta l$$

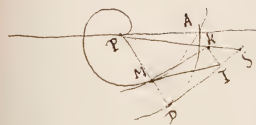
Alors part

$$DM = PD - PM = l - \frac{l}{2\pi} \theta = \frac{2\pi - \theta}{2\pi} l$$

Donc

$$\text{Tg } \angle DMI = \theta$$

cqfd.



Spirale Hyperbolique.

$$r\theta = a.$$

on voit facilement que, pour des valeurs infiniment petites de θ , r est infini; et qu'il est infiniment petit pour des valeurs infiniment grandes de θ . d'asymptote de la branche infinie est parallèle à l'axe polaire.
on trouve

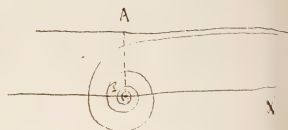
$$\log V = r \left(-\frac{\theta}{r} \right) = -\frac{a}{r}.$$

et

$$\dot{S}_\theta = -a$$

$$S_\theta = -a \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{a}{\theta} = -\frac{r^2}{a}$$

la sous-tangente est constante et égale à la distance AP, de sorte que le lieu de ses extrémités est le cercle décrit du pôle avec AP pour rayon. on voit qu'elle est négative, parce qu'elle mesure la partie de la tangente qui fait avec le rayon vecteur l'angle $180^\circ - \nu$.



Concavité et Convexité des Courbes.

Un arc de Courbe est dit *Convexe* par rapport à une Droite menée dans son plan, quand cet arc est en-dehors de l'angle aigu formé par la Droite et la Tangente en un des points de l'arc.

Si l'arc est compris dans cet angle, il est *Concave* par rapport à la Droite.

Quand une courbe est concave en un point M vers l'axe des x , les ordonnées de deux points très-voisins M' et M'' doivent être moindres, en grandeur absolue, que les ordonnées de la Tangente au point M , correspondantes aux mêmes abscisses OP' , OP'' . Soit $f(x, y) = 0$ l'éq. de la Courbe, et désignons par h la quantité $PP'' = PP'$ dont l'accroît l'abscisse. Nous aurons pour l'abscisse du point P'' , $x+h$, et pour ordonnée correspondante

$$P''M'' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{(x+0h)}$$

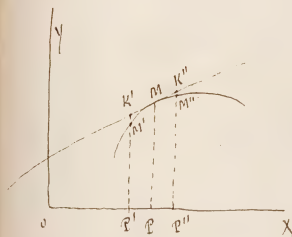
et pour l'ordonnée de la Tangente

$$P''K'' = y + \frac{dy}{dx} h$$

D'où

$$P''M'' - P''K'' = \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{(x+0h)}$$

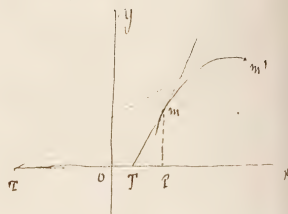
Cette différence doit être négative: il faut donc que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit lui-même négatif; on désigne cette courbe à y . — Si l'arc de courbe était situé au-dessous de l'axe des x , on arriverait à ce résultat que la dérivée seconde doit être positive. —



Donc, en Général :

Une courbe est concave vers l'axe des x pour tout point tel que l'ordonnée de ce point et la dérivée seconde sont de signes contraires.

On arrive à ce même résultat en supposant que la tangente, d'abord tangente en m , roule sur la courbe pour venir la toucher au point m' . Dans ce mouvement, le point T s'éloigne de m et l'ordonnée Tm : donc l'angle MTT' diminue, ainsi la fonction $\frac{dy}{dx}$ va en diminuant, ce qui exige que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit négatif lorsque l'axe de courbe considéré est au-dessus de l'axe des x .



on verra de la même manière que

Une courbe est convexe vers l'axe des x pour tout point tel que l'ordonnée de ce point et la dérivée seconde sont de même signe.

Si la dérivée seconde était nulle, on verrait que, pour qu'il y eût un point d'inflexion, il faut que la 1^{re} dérivée qui s'y annule soit d'ordre pair, et de même signe contraire à y ; - de même signe que y dans le cas d'un point d'inflexion convexe.

Différentielle de l'aire
en coordonnées polaires.

L'équation de la courbe est de la forme

$$r = f(\theta)$$

et alors, l'aire ou la surface comprise entre deux rayons vecteurs OA et OM est une fonction de θ que je représenterai par $R = \varphi(\theta)$. Soit OMM' un accroissement quelconque Δz donné à z , que je supposerai assez petit pour que, de M en M' , le rayon vecteur soit constamment croissant ou décroissant. - Nous avons la Inégalité

$$OM'N > \Delta z > OMN'$$

MN' et $M'N$ étant des arcs de cercle décrits du pôle avec r et $r + \Delta r$ pour rayons. - Cette Inégalité devient

$$\frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta \theta > \Delta z > \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$$

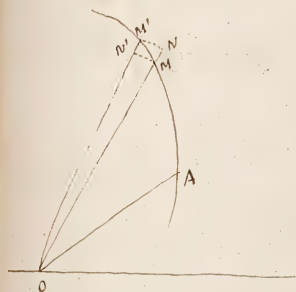
$$\frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 > \frac{\Delta z}{\Delta \theta} > \frac{1}{2} r^2$$

et par conséquent, à la limite,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2$$

$$dr = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Ce résultat est celui auquel on arriverait en comparant l'aire OMM' avec le secteur circulaire OMN' : car ce secteur est égal à $\frac{1}{2} r$ multiplié par la longueur de l'arc MN' , ou bien par le produit du rayon par l'angle $N'OM$ mesuré dans le cercle de rayon 1. Or, à la limite, cet arc sera $r d\theta$,



en comparant $d\theta$ avec l'accroissement total de θ , dont il ne diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

on aurait pu arriver à la différentielle de l'aire en coordonnées polaires en déterminant son expression de celle de l'aire dans le cas des axes rectangulaires.

on aura en effet:

$$\Delta z = OM'P' + PMM'P' - OMT$$

$$\Delta z = \frac{1}{2} (x + \Delta x)(y + \Delta y) - y \Delta x - \frac{x y}{2}$$

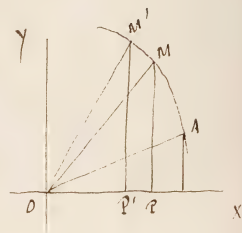
$$dx = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

et $\frac{y}{x} = \tan \theta$, $\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{x dy - y dx}{r^2 \cos^2 \theta} = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ d'où

$$x dy - y dx = r^2 d\theta$$

$$dz = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

cf p. 61.



Différentielle de l'arc.

L'arc d'une courbe plane est une quantité qui se conçoit tout-nellement: il n'en est pas de même de la longueur d'un arc de courbe. — Une ligne droite étant toute composée d'éléments identiques, il n'y a rien que de très-simple et très-immédiat dans l'idée d'une droite double, triple d'une autre. Les arcs d'un cercle pourront aussi se comparer immédiatement les uns avec les autres, puisqu'ils ont la courbure et la même pour tous les éléments. — Mais un arc de courbe quelconque est composé d'éléments différents, non superposables: Deux arcs ne peuvent donc plus être comparés l'un à l'autre immédiatement.

On considère alors l'arc de courbe comme la limite vers laquelle tend un contour polygonal inscrit ou circonscrit, lorsque le nombre de ses côtés croît indéfiniment. Après cette considération, la longueur du contour polygonal étant une quantité toujours facile à concevoir, puisqu'elle est composée d'éléments rectilignes, l'esprit arrive à concevoir celle de l'arc de courbe, et à pouvoir la comparer à la ligne droite.

Il est d'abord nécessaire de démontrer que ce contour polygonal a une limite, et une limite indépendante du mode de division.

Or on a

$$\text{Cordé } MN = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Si le point N se rapproche de M , $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers sa limite $\frac{dy}{dx}$, et l'on peut donc écrire

$$\text{Conce } MN = \Delta x \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} + \varepsilon \right\}$$

Et pendant que ε tend vers zéro en même temps que Δx , le périmètre de la ligne polygonale sera donc

$$\sum \varepsilon \Delta x + \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Je dis que cette quantité a une limite fixe. — D'abord, $\sum \varepsilon \Delta x$ a pour limite zéro. Car: Soit α la plus grande valeur que puisse prendre ε . on a

$$\sum \varepsilon \Delta x < \alpha \sum \Delta x$$

Mais $\sum \Delta x$ est une quantité finie PP' , et tend vers zéro: donc

$$\lim \sum \varepsilon \Delta x = 0$$

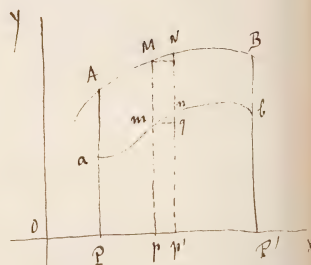
Maintenant, considérons $\sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$. La quantité que multiplie Δx est une fonction continue de x que je puis prendre pour l'ordonnée d'une courbe

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Je construis cette courbe, et joins a, m, n, b les points où elle rencontre les ordonnées de la première. L'élément de surface curviligne mnp ne diffère de l'élément rectangulaire mnp' que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. Si donc j'ai la somme des quantités telles que $y \Delta x$, la limite de cette somme ne différera pas de la limite de la somme des éléments de surface curviligne, et par suite:

$$\lim \sum y \Delta x = \text{aire } abpp' = \lambda$$

ainsi λ est la limite fixe et finie de $\sum y \Delta x$, ou de



$\sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, et par suite, du contour polygonal.

Mais avons donc, en désignant par s la limite du contour polygonal, ou la longueur de l'arc de courbe AMB ,

$$s = \lambda$$

Donc

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d\lambda}{dx} = \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

D'après ce que nous savons sur la différentielle de l'aire.

De là :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

telle est l'expression de la différentielle de l'arc.

on conclut facilement de là que la limite du rapport d'un arc quelconque à sa corde est l'unité.

En effet, soit un arc fini AMB que je représente par Δs : on aura évidemment

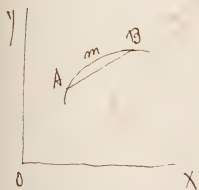
$$\frac{\Delta s}{AB} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

et puisque, quand Δx s'annule, $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ devient $\frac{ds}{dx}$, c.à.d. $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, ainsi bien que le dénominateur, on a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{arc } AMB}{AB} = 1$$

ainsi, désormais, dans tout théorème où l'on aura à considérer la limite d'un rapport dont au dénominateur sera un arc de courbe, on pourra remplacer cet arc par sa corde : car la différence de l'arc à la corde est infiniment petit par rapport à chacune de ces quantités.

on peut même démontrer que cet infiniment petit est du 3^e ordre relativement à l'arc ou à la corde. Comme on



verra plus loin qu'un arc de courbe infiniment petit peut être confondu avec un arc de cercle, je démontre la proposition pour ce dernier.

Soit AMB l'arc de cercle dont O est le centre. Soit $AMB = 2\alpha$, $AB = 2a$, $OA = R$. Nous avons

$$BR = OB \sin POB$$

$$a = R \sin \frac{\alpha}{R}$$

et en développant

$$a = R \left(\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{1}{R^3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{R^5} - \dots \right)$$

D'où

$$\alpha - a = \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{1}{R^3} - \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{R^5} + \dots$$

Ainsi $\alpha - a$ est du 3^e ordre.

En coordonnées Polaires :

Soit $MM' = \Delta s$, on pourra écrire

$$\Delta s = \frac{\text{arc } MM'}{MM'} \cdot MM' = \frac{\text{arc } MM'}{MM'} \sqrt{M'H^2 + M'I^2} = \frac{\text{arc } MM'}{MM'} \sqrt{r^2 \sin^2 \Delta \theta + \left(\Delta r + r \sin \frac{1}{2} \Delta \theta \right)^2}$$

d'où

$$\frac{\Delta s}{\Delta \theta} = \frac{\text{arc } MM'}{MM'} \sqrt{r^2 \frac{\sin^2 \Delta \theta}{\Delta \theta^2} + \left(\frac{\Delta r}{\Delta \theta} + r \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta \theta}{\frac{1}{2} \Delta \theta} \right)^2}$$

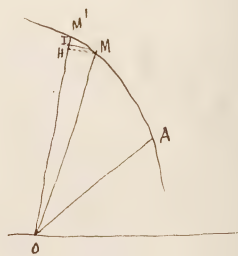
et, à la limite,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2}$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Cette formule peut se trouver directement sur la figure par la considération des infiniment petits. En menant les cordes MM' et MI , nous formons un triangle qui nous donne

$$MM'^2 = MI^2 + M'I^2 + 2 \cdot MI \cdot M'I \cdot \cos MIM'$$



Le 1^{er} membre des deux premiers termes du second sont des
 infiniment petits du second ordre par rapport à l'arc MM' ; le
 3^e terme est au contraire du 3^e ordre: car $\cos. MIM'$ tend
 infiniment vers zéro. Nous pourrions donc le négliger. Si
 maintenant nous écrivons

$$\frac{MM'^2}{MI^2} = \frac{M'I^2}{MI^2} + 1$$

Comme nous pourrions remplacer ces rapports par ceux de
 quantités qui en diffèrent infiniment peu par rapport à elles,
 MM' se confondra avec l'arc, $M'I$ avec l'arc ou le rayon vecteur,
 et MI avec l'arc dont il est la corde. Nous
 aurons donc à la limite

$$\frac{ds^2}{r^2 db^2} = \frac{dr^2}{r^2 db^2} + 1$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 db^2$$

Sur le Contact Des Courbes.

on appelle Courbes Paraboliques celles qui sont comprises dans l'équation

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \dots + kx^m$$

Proposons-nous de Déterminer les m paramètres de cette équation de manière que la courbe qu'elle représente soit osculatrice à une courbe donnée $y = f(x)$ en un point x', y' .

au lieu d'employer la méthode donnée pour le cercle, et qui entraînerait dans des calculs beaucoup trop longs, on pose

$$ax + bx^2 + cx^3 + \dots + kx^m = \varphi(x)$$

de sorte que

$$y = \varphi(x)$$

est l'éq. de la courbe parabolique. — Si l'on y remplace x par $x' + x - x'$, il vient

$$y = \varphi(x') + \varphi'(x') \cdot (x - x') + \frac{\varphi''(x')}{1.2} (x - x')^2 + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(x')}{1.2 \dots m} (x - x')^m$$

car c'est le développement d'un Polynôme algébrique.

Pour que cette courbe soit osculatrice à la Courbe donnée, il faut qu'elle ait un contact d'ordre $m-1$, m étant le nombre des paramètres. Donc :

$$\varphi(x') = f(x')$$

$$\varphi'(x') = f'(x')$$

$$\varphi''(x') = f''(x')$$

—

$$\varphi^{(m)}(x') = f^{(m)}(x')$$

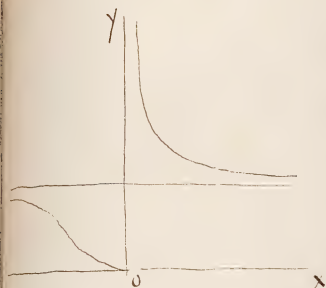
Donc en remplaçant dans le développement ci-dessus, nous aurons l'éq. de la courbe osculatrice :

$$y = f(x') + (x - x') f'(x') + \frac{(x - x')^2}{1.2} f''(x') + \dots + \frac{(x - x')^{m-1}}{1.2 \dots m} f^{(m)}(x').$$

Quoi qu'en général l'ordre du contact de deux courbes soit limité, il peut arriver pour les courbes transcendentes que l'ordre du contact soit infini. - ainsi la courbe

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

qui a la forme ci-contre, est tangente à l'axe des x à l'origine. Mais les dérivées successives reproduisant indéfiniment la forme même propre, sont toutes nulles comme cette fonction: le contact est donc d'un ordre infini.



Changements de Variable Indépendante.

Soient y et x deux variables fonctions d'une même variable indépendante t , comme seraient les coordonnées des positions successives d'un mobile en fonction du temps. Pour obtenir l'eq. de la trajectoire, il faudrait éliminer t entre les deux équations

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

et même, pour avoir la tangente à cette courbe ou pour trouver $\frac{dy}{dx}$, il semble nécessaire d'éliminer d'abord t , pour prendre ensuite x comme variable indépendante. Mais cette élimination peut n'être pas possible: t elle est d'ailleurs inutile.

En effet, si x était la variable indépendante, y et t étant des fonctions de x , on aurait:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Il s'en voit que $\frac{dy}{dx}$ est égal au quotient des dérivées de y et de x par rapport à t considéré comme variable indépendante. ou bien encore: $\frac{dy}{dx}$ est égal au rapport des différentielles par rapport à t des fonctions de t que y et x représentent.

Ce dernier résultat fait voir que dans son calcul on n'entend que la dérivée du 1.^{er} ordre, la notation ne changera pas si l'on représente encore par dy et dx les différentielles par rapport à t , lorsque cette quantité est prise pour variable indépendante.

Cherchons maintenant $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou la Dérivée de $\frac{dy}{dx}$. on obtiendra,
 D'après ce qui vient d'être Dit, en prenant Dérivant la Différentielle
 de $\frac{dy}{dx}$ par rapport à t , par la Différentielle de x relativement
 à t . Car

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx \frac{d^2y}{dt^2} - dy \frac{d^2x}{dt^2}}{dx^3}$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

on trouverait De même la Dérivée Troisième.

Soit l'équation

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

laquelle implique que y est une fonction D' x , et proposons-
 nous de prendre pour Variable Indépendante l'arc s pour
 lequel

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (a)$$

Il faut, Dans les formules Générales Trouvées pour $\frac{dy}{dx}$ et
 $\frac{d^2y}{dx^2}$, exprimer que la nouvelle variable est l'arc: et c'est à quoi
 l'on arrive en éliminant tous les x , explicites & implicites, au
 moyen de la Relation (a). on en D'duit

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

D'où

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

on aura de même

$$\frac{d^2x}{ds^2} = - \frac{\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

et, en substituant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

on continuerait de même pour les dérivées des ordres suivants.

Soit une relation

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots) = 0$$

on veut passer à un autre système de coordonnées, r et θ , qui ont avec x et y les relations

$$\begin{cases} \varphi(x, y, r, \theta) = 0 \\ \psi(x, y, r, \theta) = 0 \end{cases}$$

Il faut, entre ces trois équations, éliminer x et y . Prenons θ pour nouvelle variable indépendante.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{d\theta^2} \cdot \frac{dx}{d\theta} - \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3}$$

Alors je puis différencier les deux Eq. φ et ψ par rapport à θ en regardant x, y et r comme fonctions de θ , et il vient

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{d\theta} = 0 \\ \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{d\theta} + \frac{d\psi}{dy} \frac{dy}{d\theta} + \frac{d\psi}{dx} \frac{dx}{d\theta} = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations feront connaître les deux inconnues $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

Pour avoir $\frac{d^2y}{dt^2}$, on différencierait encore une fois.

D'après cela, proposons-nous de transformer en coordonnées polaires r et θ la valeur du rayon de courbure

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Entre x, y, r et θ existent les relations

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Différentions :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \end{cases}$$

Par une seconde différenciation, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} - r \cos \theta \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \sin \theta \frac{d^2r}{dt^2} + 2 \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \end{cases}$$

Substituant ces quatre valeurs dans l'expression de ρ , on aurait le résultat cherché. Mais on ferait ainsi des opérations inutiles. Car l'expression du rayon de courbure ne contenant pas explicitement θ (car ce rayon ne change pas quand on change l'axe polaire) on peut supposer celui-ci nul, ce qui revient à faire coïncider l'axe polaire avec la direction du rayon vecteur au point M . alors $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$, et les valeurs trouvées deviennent :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \quad \frac{dy}{dt} = r$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \frac{dr}{dt}$$

Substituant ces résultats dans les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{\frac{dr}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - r \frac{d^2r}{dt^2} + r^2}{\left(\frac{dr}{dt} \right)^3}$$

on pouvait prévoir que telle serait la valeur de $\frac{dy}{dx}$: car le rayon vecteur actuel, ou l'axe polaire, étant l'axe des x primitif, l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur est égal à l'angle de cette tangente avec l'axe des x .

Ainsi, en substituant :

$$\int = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^3}{2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - r \frac{d^2r}{dt^2} + r^2} = \frac{\left[r^2 + \frac{dr^2}{dt^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 - 2 \frac{dr^2}{dt^2} - r \frac{d^2r}{dt^2}}$$

Cette valeur du Rayon de courbure en coordonnées polaires peut se trouver directement.

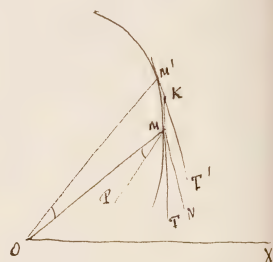
Le point donné étant M , en ce point et en un point voisin M' je mène les tangentes MT, MT' . Soit $d\varphi$ l'angle de contingence. $d\varphi$ sera l'angle TKT' , et nous aurons

$$\Delta\varphi = \angle OMN - \angle OMT$$

en menant MN parallèle à MT' : puis, si MP est parallèle à OM' :

$$\Delta\varphi = \angle OMT + \angle PMN - \angle OMT = \Delta\theta + \angle MT'P - \angle OMT$$

Mais la différence $\angle MT'P - \angle OMT$ est la différence des angles ν et ν'



que font les tangentes avec les rayons vecteurs, on peut donc la représenter par Δv :

$$\Delta q = \Delta \theta + \Delta v$$

(résultat qui se trouve immédiatement sur la figure en observant que $q = \theta + v$) : valeur remarquable, dont nous ferons usage pour la suite, et d'où l'on tire

$$\frac{\Delta q}{\Delta \theta} = 1 + \frac{\Delta v}{\Delta \theta}$$

Donc

$$\frac{dq}{d\theta} = 1 + \frac{dv}{d\theta}$$

et on a

$$\operatorname{tg} v = r \frac{d\theta}{dr}$$

d'où

$$\frac{1}{\cos^2 v} \frac{dv}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

Alors pour

$$\cos^2 v = \frac{dr^2}{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{dr^2}{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}$$

on a

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}$$

alors

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{r^2 + 2 \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}$$

Mais on a $\int = \frac{ds}{dq}$ et $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}$. Donc enfin

$$\int = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{dq}{d\theta}} = \frac{\left[r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}} = \frac{\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{d\theta \left(r^2 d\theta^2 + 2 dr^2 - r d^2 r\right)}$$

applications à Quelques Courbes.

Spirale Logarithmique.

Son Equation est

$$r = k e^{m\theta}$$

on a donc

$$\frac{dr}{d\theta} = m k e^{m\theta} = m r$$

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = m^2 k e^{m\theta} = m^2 r$$

Donc

$$\rho = \frac{r^2 (m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{r^2 (1 + 2m^2 - m^4)} = r \sqrt{1 + m^2}$$

Si l'on cherche la Semi-normale :

$$\int_n = \frac{dr}{d\theta} = m r$$

et l'on aura pour la Normale

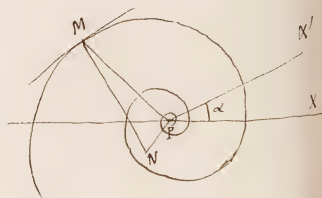
$$MN = \sqrt{r^2 + m^2 r^2} = r \sqrt{1 + m^2} = \rho$$

on a le point N et le centre de courbure, et l'on a le point N sur la développée. - Cherchons son Equation.

$$NP = MP \text{ et } PMN = \int_n = m r$$

$$r' = m k e^{m\theta}$$

et l'on a l'Eq. de la développée. Seulement, θ n'est pas l'angle que fait l'axe avec le rayon vecteur, mais avec une perpendiculaire MP au rayon vecteur. Si nous voulons ramener cette Eq. à la form.



Ordonnée, soit PX' un nouvel axe polaire faisant avec le premier un angle α : nous aurons

$$\theta' + \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\theta = \theta' + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

et l'éq. devient

$$r' = m k e^{m\theta'} e^{(\alpha - \frac{\pi}{2}) m}$$

or, on peut disposer de α de manière que

$$m e^{m(\alpha - \frac{\pi}{2})} = 1$$

car il suffit de poser $\alpha m + m(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 0$ Donc $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha m}{m}$.

ainsi, pour cette valeur de α , l'éq. de la développée relative au nouvel axe polaire prend la forme

$$r' = k e^{m\theta'}$$

elle représente donc la même spirale que la proposée.

Coniques.

Leur eq. générale est

$$y^2 = 2ax + bx^2$$

Choisissons le rayon de courbure, dont la valeur générale est

$$\rho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

pour déterminer p , j. différencie la proposée.

$$y \frac{dy}{dx} = a + bx$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{a+bx}{y}$$

Differentiant une seconde fois

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{by - (a+bx) \frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{by^2 - (a+bx)^2}{y^3} = \frac{2ax + b^2x^2 - (a+bx)^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = -\frac{a^2}{y^3}$$

Par conséquent :

$$\int = \pm \frac{\left(1 + \frac{(a+bx)^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} y^3}{a^2}$$

Si maintenant nous cherchons la longueur de la normale :

$$N = y \sqrt{1+p^2}$$

d'où

$$N^3 = y^3 \left(1 + \frac{(a+bx)^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Comparant cette valeur à celle du rayon de courbure, on voit que l'on a

$$\int = \frac{N^3}{a^2}$$

d'où

Th. Le rayon de courbure d'une conique est égal au cube de la Normale divisé par le carré du paramètre.

Pour avoir les développés des coniques, il faut éliminer x et y entre ces équations

$$\begin{cases} y - p^2 = -\frac{1+p^2}{q} \\ x - 2 = \frac{p(1+p^2)}{q} \\ y^2 = 2ax + bx^2 \end{cases}$$

Puis d'abord le cas de la Parabole :

$$b=0, \quad y^2 = 2ax, \quad p = \frac{a}{y}, \quad q = -\frac{a^2}{y^3}$$

Les 3 Eq. sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} y - \beta = \frac{1 + \frac{a^2}{y^2}}{\frac{a^2}{y^3}} = y + \frac{y^3}{a^2} \\ x - \alpha = -\frac{\frac{a}{y} \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right)}{\frac{a^2}{y^3}} = -\frac{a(y^2 + a^2)}{a^2} = -\left(a + \frac{y^2}{a}\right) \\ y^2 = 2ax \end{array} \right.$$

Admi. l'on déduit

$$\beta = -\frac{y^2}{a^2} \quad \alpha = -\beta^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} \quad x = \alpha - \left(a + \frac{2ax}{a}\right) = \frac{\alpha - a}{2}$$

Substituant dans $y^2 = 2ax$ ces valeurs de x et y :

$$2^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} (\alpha - a) \quad \beta^2 = \frac{4}{27} a (\alpha - a)^3$$

$$\beta = \pm \frac{2}{3} (\alpha - a) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\alpha - a}{a}}$$

Si l'on transporte l'axe des ordonnées parallèlement à lui-même jusqu'au point O tel que $AO = a$, l'eq. prend la forme plus simple

$$\beta^2 = \frac{4}{27a} \alpha^3$$

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{4}{27a}} \alpha^{\frac{3}{2}}$$

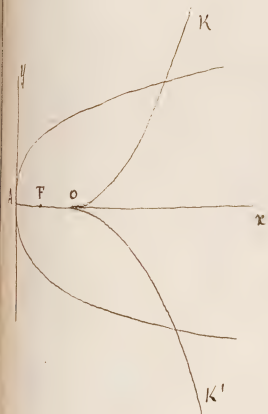
En construisant cette courbe, on reconnaît qu'elle a la forme KOK' , symétrique par rapport à l'axe des x .

En différenciant, on trouve

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{4}{27a}} \alpha^{\frac{1}{2}} \quad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{4}{27a}} \alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6a}} \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

Le signe de $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ est le même que celui de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Par conséquent la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x .

on représente cette courbe en Géométrie analytique comme



On du point D on ne peut mener à la Parabole que
deux normales.

Sur les deux autres coniques, on trouve des Equations
binômes. Celles de l'ellipse qui a pour equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad (1)$$

en posant

$$\begin{cases} A = \frac{c^2}{a} \\ B = \frac{c^2}{b} \end{cases}$$

Remarquons d'abord que cette Equation peut être mise sous
une forme rationnelle par deux Elevations au cube. Il vient
pour une 1^{re} Elevation au cube

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} = 1$$

et ensuite, en observant que la quantité entre parenthèses est
égale à 1 (c'est ce qui fait le succès de la méthode) :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

D'où

$$27\left(\frac{x}{A}\right)^2\left(\frac{y}{B}\right)^2 = \left\{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2 - \left(\frac{y}{B}\right)^2\right\}^3$$

Equation de troisième Degré.

La courbe se coupe avec l'ellipse aux Distances $\pm A$ et $\pm B$,
la 1^{re} et la 2^{de} pouvant être $\geq b$.

En différenciant deux fois l'eq. (1), on obtient

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dx}{A} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{B} = 0$$

puis

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{da^2}{A^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{db^2}{B^2} + \left(\frac{1}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{d^2b}{B} = 0$$

Donc

$$\frac{d^2b}{da^2} = \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{A^2} + \left(\frac{b}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot \left(\frac{da}{db}\right)^2}{3\left(\frac{b}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{B}}$$

et le signe de cette quantité est celui de son dénominateur, puisque le numérateur est positif. Elle est donc de même signe que b . Donc, en tous les points, la courbe est convexe vers l'axe des abscisses.

De plus, comme l'on a

$$\frac{db}{da} = - \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{A}}{\left(\frac{b}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{B}} = - \frac{B}{A} \left(\frac{Ab}{Ba}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

la courbe est tangente aux axes aux points où elle les rencontre; D'où qu'elle présente des rebroussements de première espèce.

On lui trouve donc la forme de la figure.

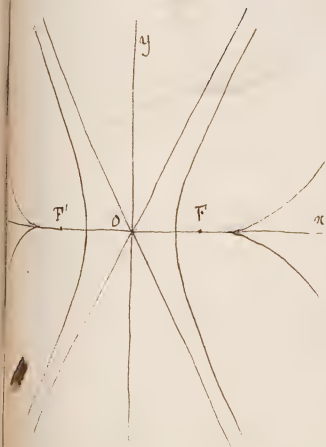
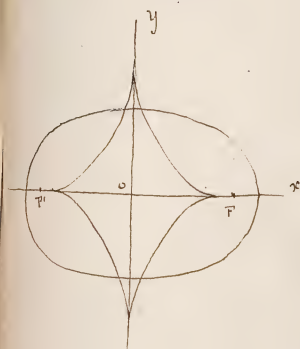
Quant à l'Hyperbole, dont l'éq. est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on aura pour la développée une Eq. semblable

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

La discussion de cette courbe montre qu'elle a des branches elliptiques qui s'étendent symétriquement des deux côtés des axes, et qu'elle présente des points de rebroussement aux points où elle rencontre et touche l'axe des x .



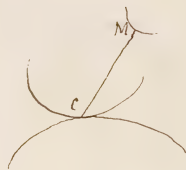
Cycloïde.

on appelle Cycloïde ou quelquefois Roulette le lieu du point.
d'un cercle qui roule sans
glisser sur une droite fixe. - Et s'agit d'en trouver l'eq.
et les propriétés.

Ce problème est un cas particulier de celui-ci: Trouver le lieu
d'un point quelconque du plan invariablement lié à une
courbe quelconque qui roule sur une autre courbe. - on dit
qu'une courbe roule sur une autre lorsque les éléments succes-
sifs de cette courbe viennent s'appliquer l'un après l'autre
sur ceux de la seconde; les éléments qui viennent à coïncider
étant égaux. La troisième courbe glisse sur la 1^{re} quand
le même point de la courbe mobile parcourt successivement
tous les points de la seconde. Enfin, il y a à la fois roulement
et glissement quand les éléments des deux courbes qui coïncident
successivement ne sont pas égaux.

Cela posé, la propriété caractéristique du lieu, en général,
est que la droite qui joint le point décrivant M au point
de contact actuel C des deux courbes, est normale au
lieu au point M. - on arrive facilement à ce théorème
par la considération des polygones infinitésimaux dont les
deux courbes sont les limites.

Si les courbes sont toutes deux des cercles, le lieu prend le
nom d'Epicycloïde. - Quand le rayon du cercle fixe
devient infini, ce cercle se réduit à une droite, et le lieu



et la cycloïde, dont nous allons nous occuper.

A étant le point où le point d'écartsant M est venu coïncider avec la Directrice x' , l'éq. naturelle de la cycloïde est

$$AB = \text{arc } BM$$

Il s'agit de l'exprimer en coordonnées ordinaires. Or

$$AB = x + BP = x + \sqrt{a^2 - (a-y)^2} = x + \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\text{arc } MB = a \cdot \text{arc } \cos \frac{OQ}{OM} = a \cdot \text{arc } \cos \frac{a-y}{a}$$

Donc

$$x = a \cdot \text{arc } \cos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

Cette est l'équation de la Cycloïde. - Mais elle a été obtenue dans une position particulière du cercle, lorsque le point mobile tend à s'élever. - Si ce point tendait à redescendre, il faudrait changer le signe du radical.

Eq. Toutes les Cycloïdes sont semblables.

Mettons en évidence dans l'équation les rapports $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$:

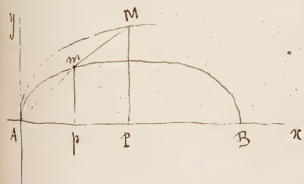
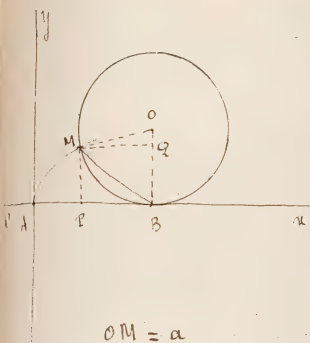
$$\frac{x}{a} = \text{arc } \cos \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2 \frac{y}{a} - \left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

et, posant

$$\frac{x}{a} = X \quad \frac{y}{a} = Y$$

$$X = \text{arc } \cos (1 - Y) - \sqrt{2Y - Y^2}$$

Soit AmB la cycloïde dont voilà l'équation, et qui est engendrée par le cercle de rayon 1. Quel est, sur la droite am, le point M appartenant à la cycloïde de rayon a, et supposée prenant son origine en A ? Le rapport des distances AM et Am est celui des ordonnées MZ et mp. Donc, en désignant par



x et y les coordonnées de M ,

$$\frac{y}{x} = \alpha = \frac{MP}{mp} = \frac{x}{x}$$

et par conséquent

$$MP = a \cdot mp$$

et

$$AM = a \cdot Am$$

c.à.d. que pour obtenir la seconde cycloïde au moyen de la première, il suffit d'augmenter les rayons vecteurs de celle-ci dans un rapport constant. or telle est la définition de deux courbes semblables.

Donc ... c.q.f.d.

Cette propriété tient à ce qu'il n'entre dans l'équation de la cycloïde qu'un seul paramètre variable a . - c'est ainsi que toutes les paraboles dont l'équation générale est $y^2 = 2px$ sont semblables.

Pour discuter commodément la courbe, il est bon d'introduire dans son équation une variable arbitraire dont x et y seront des fonctions. on choisit généralement l'angle qui fait la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la droite fixe avec le rayon qui va au point M . on a alors

$$\begin{cases} x = a(\omega - \sin \omega) \\ y = a(1 - \cos \omega) \end{cases}$$

Ces deux formules sont vraies pour toutes les positions du point M , comme il est facile de le vérifier.

on voit tout de suite que les valeurs maxima de y est a , et que l'ordonnée atteint cette valeur quand le point de contact avec la droite fixe et le point M sont aux extrémités d'un même diamètre, ce qui arrive quand le cercle a fait une demi-

444.

q. on

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y} - 1$$

Donc on a $\frac{d^2y}{dx^2}$, Différentions :

$$2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

En substituant dans

$$f = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

il vient

$$f^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\left(\frac{a}{y^2}\right)^1} = 8ay$$

$$f = 2\sqrt{2ay} = 2MB.$$

Comme d'ailleurs MB est la normale, on aura le centre de courbure en prolongeant MB jusqu'en N d'une quantité égale à elle-même.

Cela nous permet de déterminer d'une manière très-simple la développée sans qu'il soit nécessaire d'en chercher l'équation. En effet, soit BNK un cercle égal au cercle BM, et tangent en B à l'axe Ax. D'autre côté. Menons par K, KE parallèle à Ax, et prolongeons le diamètre LB' jusqu'en E. on aura évidemment

$$\text{arc MB} = AB$$

Donc

$$\text{Arc NB} = AB$$

Ainsi par conséquent,

$$BNK = AB$$

Ainsi, en retranchant

$$\text{arc NK} = KE$$

Cela fait voir que la cycloïde a pour développée une cycloïde égale engendrée par le mouvement d'un cercle égal au cercle MB, mais qui roulerait sur KE, parallèle à Ax, au-dessous de cette droite, et à une distance de celle-ci égale au diamètre de

Circle mobile. Cette cycloïde aurait la forme AEA' ...

on peut d'ailleurs démontrer sans la considération des rayons de courbure que la cycloïde AEA' est la développée de $AL'A'$. En effet, les deux cycloïdes étant égales entre elles, et les deux cercles BML et BNA étant de même rayon, MN sera la tangente en N à la seconde cycloïde. Donc cette cycloïde est l'enveloppée des normales à la 1^{re}, et par suite, en est la développée.

Cherchons maintenant directement l'Eq. de la développée. on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y}} - 1 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

Substituons ces valeurs dans les équations

$$\begin{cases} 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \\ x - \alpha + (y-\beta) \frac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

ou 1^{re} équation

$$\frac{2a}{y} - (y-\beta) \frac{a}{y^2} = 0$$

D'où

$$y = -\beta$$

La 2^e donnera

$$x - \alpha - 2\beta \sqrt{\frac{2a}{y}} - 1 = 0$$

D'où

$$x = \alpha + 2\beta \sqrt{\frac{2a}{\beta}}$$

Mais β est négatif, puisque $y > 0$ et $\beta = -y$. Donc, en faisant passer β sous le radical, on a

$$x = \alpha - 2 \sqrt{-2a\beta - \beta^2}$$

Substituant ces valeurs de x et y dans l'Eq. de la cycloïde, il vient

$$\chi = \alpha \cdot \arccos \frac{a+\beta}{a} + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}$$

Cette équation ressemble beaucoup à celle de la cycloïde. on peut rendre leur identité parfaite en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point E. Il faudra poser

$$\beta = y' - 2a$$

$$x = x' + a\pi$$

Substituons ces valeurs. Il vient, pour l'Eq. Développée

$$x' + a\pi = a \cdot \text{arc cos } \frac{a + y' - 2a}{a} + \sqrt{(2a - y')(2a + y' - 2a)}$$

$$x' = -a \left(\pi - \text{arc cos } \frac{y' - a}{a} \right) + \sqrt{2ay' - y'^2}$$

Mais l'arc dont le cosinus est $\frac{y' - a}{a}$ et le supplément de l'arc $\pi - \text{arc cos } \frac{y' - a}{a}$. Les deux arcs ont donc des cosinus égaux et de signes contraires : Donc

$$\pi - \text{arc cos } \frac{y' - a}{a} = \text{arc cos } \frac{a - y'}{a}$$

Donc l'Eq. Développée est

$$x' = -a \cdot \text{arc cos } \frac{a - y'}{a} + \sqrt{2ay' - y'^2}$$

Enfin, si nous convenons de compter les x' non pas dans le sens KE, comme nous comptons x , mais dans le sens EK, nous changerons le signe du 2^e membre de notre équation, et il viendra enfin

$$x' = a \cdot \text{arc cos } \frac{a - y'}{a} - \sqrt{2ay' - y'^2}$$

qui est l'Eq. identique à celle de la Cycloïde proposée.

au point A, le rayon de courbure de la Cycloïde proposée est nul, quoique sa tangente MB devint nulle pour ce point. Donc, comme un arc de la développée est égal à la différence des rayons de courbure extrêmes, il en résulte que l'arc AN de la développée est égal au rayon de courbure MN, ou au

Double de BN. L'arc AE est donc aussi égal à $EL' = 4a$.
La cycloïde est donc une courbe rectifiable.

Après le même Théorème, nous aurons encore

$$\text{arc AN} = 2 \text{ AN'}$$

donc cette Proposition :

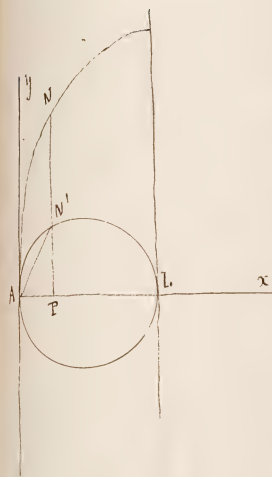
L'arc de cycloïde compris à partir du sommet et le double de la corde de l'arc central de cercle central qui en est la projection.

Donc, si nous prenons pour axes x le diamètre AL de ce cercle central, et pour celui de y la tangente au sommet, en désignant par s la longueur de l'arc de cycloïde AN, nous aurons

$$s = 2\sqrt{2ax}$$

$$s^2 = 8ax$$

Equation que l'on pourrait considérer comme celle de la cycloïde, on remarquera qu'elle est tout à fait semblable à celle de la parabole, $y^2 = 8ax$: mais le système des coordonnées est tout différent.



Différentiation Des Fonctions

De

Plusieurs Variables Indépendantes.

Soit

$$u = f(x, y, z)$$

on peut supposer que chacune des variables varie seule à son tour, ce qui donne trois différentielles partielles, qu'on désigne par les notations

$$\frac{du}{dx} dx, \quad \frac{du}{dy} dy, \quad \frac{du}{dz} dz$$

on appelle différentielle totale la somme de ces trois différentielles partielles. on la représente par du :

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz$$

Lorsqu'on donne à x, y, z des accroissements arbitraires $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, la fonction u prend un accroissement total Δu . Nous allons démontrer que Δu se compose de deux parties, l'une du , qui renferme les accroissements arbitraires à la première puissance, l'autre qui les renferme à des puissances plus élevées : D'où il suivra que le rapport de Δu à du convergera vers l'unité, quand $\Delta x, \Delta y$ et Δz convergeront vers zéro.

Nous avons

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

ce qu'on peut écrire

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) \\ + f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) \\ + f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

ou bien

$$\Delta u = \Delta z \{ f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + \gamma \} + \Delta y \{ f'_y(x+\Delta x, y, z) + \beta \} + \Delta x \{ f'_x(x, y, z) + \alpha \}$$

γ devenant nul avec Δz , β avec Δy , α avec Δx . - Mais $f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$ ne diffère de $f'_z(x, y, z)$ que d'une quantité qui devient nulle avec Δx et Δy , en supposant f'_z continue. De même pour $f'_y(x+\Delta x, y, z)$. Donc on peut écrire

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dz} \Delta z + \frac{du}{dy} \Delta y + \frac{du}{dx} \Delta x \right) + \gamma' \Delta z + \beta' \Delta y + \alpha' \Delta x$$

La quantité entre parenthèses n'est autre que la différentielle totale de u . Il est donc démontré que Δu se compose de du , plus une quantité qui contient les premiers termes développés de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: car α', β', γ' sont nécessairement fonctions de ces quantités.

Il suit de là que

$$\frac{\Delta u}{\Delta u} = 1 + \frac{\alpha' \Delta x + \beta' \Delta y + \gamma' \Delta z}{\Delta u} = 1 + \frac{\alpha' + \beta' \frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma' \frac{\Delta z}{\Delta x}}{\frac{\Delta u}{\Delta x}}$$

Si l'on conclut que si les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ qui entrent aux deux termes conservent une valeur finie, on a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = 1.$$

Si la fonction $f(x, y, z)$ est constante dans un certain Intervalle, toutes ses Dérivées sont nulles dans cet Intervalle. Car il résulte de ce qui a été démontré pour les fonctions d'une seule Variable que toutes ses Dérivées partielles sont nulles: Donc aussi la Dérivée totale.

Opérons les Dérivées et les Différentielles d'ordre supérieur.

Soit seulement

$$u = f(x, y)$$

Les coefficients différentiels partiels du 1^{er} ordre étant

$$\frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy}$$

on peut différencier chacun d'eux par rapport à x et à y , ce qui donnera

$$\frac{d^2u}{dx^2} \quad \frac{d^2u}{dx dy} \quad \frac{d^2u}{dy dx} \quad \frac{d^2u}{dy^2}$$

ce qui ferait les coefficients différentiels pour le second ordre. Mais on démontre que

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx}$$

C.à.d. que l'ordre dans lequel on effectue les différenciations par rapport à x ou à y n'influe point sur le résultat. on a en effet

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x, y)$$

et donnons à y un accroissement Δy :

$$\Delta \frac{du}{dx} = f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)$$

on bien

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y}$$

au numérateur, il y a une Différence 2^e Dérivées. on peut donc écrire

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{\frac{d}{dx} \{ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \}}{\Delta y}$$

Mais Δy n'a rien par avec x . donc

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right\}$$

Faisons tendre Δy vers zéro ; il vient

$$\frac{d \frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d \frac{du}{dy}}{dx}$$

ou

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx} \quad \text{c. q. f. d.}$$

on peut facilement généraliser ce résultat, c. à d. démontrer que

$$\frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^n dx} = \frac{d^{m+n+1} u}{dx^{m+1} dy^n}$$

En effet, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^n dx} = \frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^{n-1} dy dx} = \frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^{n-1} dx dy}$$

Abstrayant de côté la dernière différentiation par rapport à y , on démontrera que

$$\frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^{n-1} dz} = \frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^{n-2} dz dy}$$

et ainsi Suite, D'où qu'on arrivera enfin à

$$\frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n dz} = \frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^{n-1} dz} = \frac{d^{m+n} u}{dx^{m+1} dy^n}$$

et rétablissant alors toutes les Différentiations négligées relatives à y , on aura l'égalité à démontrer.

Cette égalité aurait lieu D'ailleurs quel que fût le nombre des variables indépendantes.

Cherchons maintenant la Différentielle Totale Du Second ordre.
Nous avons pour le premier

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz$$

Pour le second, on définit la Différentielle Totale la Somme Des Différentielles Totales De chacune Des Différentielles partielles Du premier. - on a donc

$$d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 u}{dxdy} dx dy + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} dx dz + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2 + 2 \frac{d^2 u}{dy dz} dy dz + \frac{d^2 u}{dz^2} dz^2$$

on représente symboliquement ce résultat par

$$d^2 u = \left[\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \right]^2$$

en convenant d'emplacer l'exposant 2 de du par un indice de Différentiation, $(du)^2$ par $d^2 u$.

Cette loi est générale. - Supposons qu'elle ait lieu pour $n-1$ Différentiations, D'où qu'on ait symboliquement

$$d^{n-1} u = \left[\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \right]^{n-1}$$

Il est clair qu'on aura la même égalité pour $d^n u$. Le terme général de $d^{n-1} u$ est de la forme

$$(1) \quad A \frac{d^{n-1} u}{dx^p dy^q dz^r} dx^p dy^q dz^r \quad p+q+r = n-1$$

Le terme général du Développement Symbolique sera

$$(2) \quad A \frac{d^{n-1} u}{dx^p dy^q dz^r} dx^p dy^q dz^r$$

Pour avoir le terme général de la différentielle totale de n^{e} ordre, il faut différentier (1) par rapport aux trois variables, ce qui donne

$$\cancel{A \frac{d^n u}{dx^{p+1} dy^q dz^r}} + \cancel{A \frac{d^n u}{dx^p dy^{q+1} dz^r}} \\ A \frac{d^n u}{dx^{p+1} dy^q dz^r} dx^{p+1} dy^q dz^r + A \frac{d^n u}{dx^p dy^{q+1} dz^r} dx^p dy^{q+1} dz^r + A \frac{d^n u}{dx^p dy^q dz^{r+1}} dx^p dy^q dz^{r+1}$$

Ainsi pour obtenir le terme correspondant de la puissance n^{e} de du — on moyen de (2), il faut multiplier (2) par la n^{e} puissance de du ; ce qui donne

$$A \frac{d^n u}{dx^{p+1} dy^q dz^r} dx^{p+1} dy^q dz^r + A \frac{d^n u}{dx^p dy^{q+1} dz^r} dx^p dy^{q+1} dz^r + A \frac{d^n u}{dx^p dy^q dz^{r+1}} dx^p dy^q dz^{r+1}$$

ainsi la loi se continue; elle est donc générale, et l'on a

$$d^n u = \left[\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \right]^n$$

Fonctions Implicites.

Soit z une fonction de x et de y donnée par

$$f(x, y, z) = 0$$

on demande dz .

Si l'on suppose que dans le 1^{er} membre de l'équation on remplace z par sa valeur en fonction de x et de y , l'éq. devient triviale, et les dérivées totales ou partielles du 1^{er} membre seront nulles. — Mais alors, nous pourrions différencier $f(x, y, z)$ qui est supposé ne plus contenir que les deux variables indépendantes x et y . Mais on verra donc pour les différentielles partielles, d'après les règles des fonctions de fonctions,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = 0 \quad (1) \\ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

De ces deux eq. on tirera les deux différentielles partielles. 2 on tirera aussi dans ces expressions, et ne pourra être éliminé que quand on saura résoudre l'éq. proposée.

Pour avoir la différentielle totale, il faut faire la somme des différentielles partielles: on peut y arriver en multipliant (1) par dx , (2) par dy , et ajoutant:

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0$$

D'où on tirerait dz . — Cette eq. a l'avantage d'être symétrique, et s'applique aussi bien aux différentielles de x ou y considérées comme fonctions de deux autres variables, qu'à les différentielles de z en regardant x et y comme variables indépendantes.

Passons aux différentielles du 2^e ordre.

Nous avons trois dérivées partielles à chercher. — Si l'on

ont ainsi $\frac{d^2z}{dx^2}$, on différenciera (1) par rapport à x , en regardant z et $\frac{dz}{dx}$ comme des fonctions de x ; on obtiendra l'éq. (1) devient identique si l'on remplace ces deux fonctions par leurs valeurs en x et en y . - on aura ainsi:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2 \frac{d^2f}{dx dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2} \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{df}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

Ce qui au point d'être symboliquement

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{df}{dz} \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

on obtiendra de là $\frac{d^2z}{dx^2}$ en remplaçant $\frac{dz}{dx}$ par sa valeur déjà connue.

En différenciant (2) par rapport à y , on aura une équation qui donnera $\frac{d^2z}{dy^2}$.

Si l'on coefficient différentiel partiel s'obtiendrait en différenciant (1) par rapport à y , ou (2) par rapport à x .

Le 1^{er} mode donnera

$$\frac{d^2f}{dx dy} + \frac{d^2f}{dx dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz dy} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} + \frac{df}{dz} \frac{d^2z}{dx dy} = 0$$

dx^2 serait la somme des trois différentielles partielles, et serait donnée par l'éq. symbolique

$$d^2z = \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right)^2$$

Si l'on multiplie les trois éq. différentielles par dx^2 , dy^2 , $2 dx dy$, leur somme donnera une éq. qui fera connaître d^2z , en observant que, dans ces trois équations les trois inconnues subissent le même coefficient, qui est $\frac{df}{dz}$.

on peut trouver Directement la différentielle totale sans être obligé de chercher chaque différentielle partielle. on a

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0$$

Le premier des étant la différentielle totale du 1^{er} ordre. Cette eq. peut être considérée comme fonction de x et de y seulement, z et dz étant remplacés par leurs valeurs en fonction des deux variables indépendantes: alors, l'eq. est identique. La dérivée totale est donc nulle, ainsi que la différentielle:

$$\frac{d^2f}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2f}{dxdy} dx dy + 2 \frac{d^2f}{dx dz} dx dz + \frac{d^2f}{dy^2} dy^2 + 2 \frac{d^2f}{dy dz} dy dz + \frac{d^2f}{dz^2} dz^2 + \frac{df}{dz} d^2z = 0$$

ce qu'on peut écrire symboliquement

$$\left(\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz \right)^2 + \frac{df}{dz} d^2z = 0$$

Extension de la Série de Taylor
aux fonctions de Plusieurs Variables Indépendantes.

Soit une fonction

$$f(x, y, \dots, z)$$

D'un nombre quelconque de variables. Donnons à x, y, \dots, z
des accroissements h, k, \dots, l et cherchons le développement de

$$f(x+h, y+k, \dots, z+l)$$

suivant les puissances ascendantes de h, k, \dots, l .

La méthode la plus naturelle serait de donner d'abord à
 x seul un accroissement h , puis de faire varier y dans
tous les termes du développement obtenu, ... et enfin de
changer z en $z+l$ dans le dernier développement obtenu.

$$f(x+h, y, \dots, z) = f(x, y, \dots, z) + \frac{h}{1} f'_x(x, y, \dots, z) + \frac{h^2}{2} f''_{xx}(x, y, \dots, z) + \dots + R$$

Changerons y en $y+k$:

$$f(x+h, y+k, \dots, z) = f(x, y+k, \dots, z) + \frac{k}{1} f'_y(x, y+k, \dots, z) + \frac{k^2}{2} f''_{yy}(x, y+k, \dots, z) + \dots + R$$

on développera à chaque fois les termes d'après la série de Taylor,
dans le cas d'une seule variable. Puis, dans ces développements,
on changera z en $z+l$. - Mais il sera très-pénible de trouver
le terme complémentaire du développement général: car ce
terme serait la somme de chacun des restes partiels donnés
par chaque développement. La formule ne le présenterait donc pas

à la discussion. ainsi préférée-t-on arriver au développement
par une autre voie.

afin de retomber sur le cas d'une seule variable, nous introdui-
sons une variable arbitraire t , et nous nous proposons de
développer

$$f(x+t\eta, y+t\kappa, z+t\ell)$$

suivant les puissances de t . or c'est là une fonction de t , $q(t)$;
quel on peut développer par la formule de MacLaurin

$$f(x+t\eta, y+t\kappa, z+t\ell) = q(t) = q(0) + \frac{t}{1} q'(0) + \frac{t^2}{1.2} q''(0) + \dots + \frac{t^n}{1.2.3 \dots n} q^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{1.2.3 \dots (n+1)} q^{(n+1)}(0)$$

Pour revenir au développement que nous voulons trouver, il suffira
de faire dans celui-ci $t=1$. Nous aurons ainsi

$$f(x+\eta, y+\kappa, z+\ell) = q(0) + q'(0) + \frac{1}{1.2} q''(0) + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} q^{(n)}(0) + \frac{1}{1.2.3 \dots (n+1)} q^{(n+1)}(0)$$

et il reste à déterminer les quantités $q(0)$, $q'(0)$ etc.

Observons d'abord $q'(t) = q''(t)$. Pour cela, je pose

$x+t\eta = x'$, $y+t\kappa = y'$, $z+t\ell = z'$. En différenciant
 $q(t)$, j'obtiens

$$q'(t) = \frac{df}{dx'} \eta + \frac{df}{dy'} \kappa + \frac{df}{dz'} \ell$$

car les relations

$$\left. \begin{array}{l} x+t\eta = x' \\ y+t\kappa = y' \\ z+t\ell = z' \end{array} \right\} \text{ donnent } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = \eta \\ \frac{dy'}{dt} = \kappa \\ \frac{dz'}{dt} = \ell \end{array} \right.$$

d'où l'on a donc ensuite, symboliquement

$$q''(t) = \left[\frac{df}{dx'} \eta + \frac{df}{dy'} \kappa + \frac{df}{dz'} \ell \right]^2$$

et en général

$$\varphi^n(t) = \left[\frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} k + \frac{df}{dz} l \right]^n$$

Puis, en faisant $t=0$,

$$\varphi^n(0) = \left[\frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} k + \frac{df}{dz} l \right]^n$$

Car $\frac{df}{dx}$ est comprise en x, y, z comme $\frac{df}{dx}$ est comprise en x, y, z , c.à.d. que pour avoir $\frac{df}{dx}$, il suffit de changer x, y, z en x', y', z' dans $\frac{df}{dx}$. Mais, si $t=0$, on a $x'=x, y'=y, z'=z$: Donc alors

$$\frac{df}{dx'} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy'} = \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz'} = \frac{df}{dz}$$

on a si ailleurs évidemment

$$\varphi(0) = f(x, y, z)$$

Pour avoir $\varphi^{n+1}(\theta)$, il suffira de changer t en θ , c.à.d. remplacer dans $\varphi^{n+1}(0)$ x, y, z par $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$.

ainsi, en définitive, symboliquement :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l) &= f(x, y, z) + \left(h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy} + l \frac{df}{dz} \right) \\ &\quad + \frac{1}{1!} \left(h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy} + l \frac{df}{dz} \right)^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy} + l \frac{df}{dz} \right)^n \\ &\quad + R \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{(n+1)!} \left[h \left(\frac{df}{dx} \right)_{\substack{x+\theta h \\ y+\theta k \\ z+\theta l}} + k \left(\frac{df}{dy} \right)_{\substack{x+\theta h \\ y+\theta k \\ z+\theta l}} + l \left(\frac{df}{dz} \right)_{\substack{x+\theta h \\ y+\theta k \\ z+\theta l}} \right]^{n+1}$$

Le reste de la Série de Maclaurin s'écrit quelquefois sous la forme

$$\frac{\varphi^n(\theta) - \varphi^n(0)}{1.2.3 \dots n}$$

et cette forme n'exige pour que l'on connaisse la dérivée $(n+1)^{\text{e}}$. — On aura

$$\varphi^n(0) = \sqrt[n]{x, y, z}$$

on en déduit évidemment

$$\varphi^n(\theta) = \sqrt[n]{x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l}$$

Remarque. La Série de Maclaurin, sur laquelle on s'est appuyé, exige que $\varphi^n(t)$ soit fini et continu depuis $t=0$ jus qu'à la valeur particulière que nous avons appelée t . on sait qu'alors toutes les autres fonctions de t sont finies et continues dans le même intervalle. Mais comme on a

$$\varphi^n(\theta) = \sqrt[n]{x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l}$$

il faut que la dérivée $n^{\text{ième}}$ soit finie et continue pour toutes les valeurs comprises entre l'état x, y, z et $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$.

Mais la dérivée totale de n^{e} ordre se compose de dérivées partielles de même ordre. Donc elles-ci doivent être continues.

Le rapport du reste au terme auquel on s'arrête tend indéfiniment vers zéro si l'on prend h, k, l infiniment petits. En prenant la seconde forme du reste, ce rapport est

$$\frac{\varphi^n(\theta) - \varphi^n(0)}{\varphi^n(0)}$$

ou bien

$$\frac{\psi(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l) - \psi(x, y, z)}{\psi(x, y, z)}$$

Mais

$$\varphi^n(0) = \psi(x, y, z) = \left[\frac{df}{dx} h + \frac{df}{dy} k + \frac{df}{dz} l \right]^n$$

et le terme général de ce développement peut être représenté par

$$A h^\alpha k^\beta l^\gamma \quad (\alpha + \beta + \gamma = n)$$

et le terme qui correspond à celui-ci dans le développement de

$$\psi(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l) \text{ sera}$$

$$A' h^\alpha k^\beta l^\gamma$$

Mais si nous posons $k = mh$, $l = ph$, h^R sera facteur commun, et les deux termes deviendront

$$A h^R m^\beta p^\gamma \quad \text{et} \quad A' h^R m^\beta p^\gamma$$

Donc le rapport pourra s'écrire

$$\frac{\sum [(A' - A) h^R m^\beta p^\gamma]}{\sum A h^R m^\beta p^\gamma} = \frac{A^n \sum [(A' - A) m^\beta p^\gamma]}{h^n \sum A m^\beta p^\gamma}$$

Mais A' n'est autre chose que A dans lequel x, y et z ont été remplacés par $x+\theta h$, $y+\theta k$ et $z+\theta l$. on peut donc prendre h, k et l aussi petits qu'on veut, pour que la différence $A' - A$ soit moindre que toute quantité donnée. Si donc on suppose que les rapports α et β conservent invariables une valeur finie, tous les termes du numérateur tendront vers zéro, tandis que le dénominateur restera fini. Le limite du rapport est donc zéro.

En faisant, dans la série de Taylor, $x=y=z=0$, et

et remplaçant h, k, l par x, y, z , on aura la
Série de Maclaurin étendue au cas de plusieurs Variables.

Nous pourrions écrire

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{1.2} \left\{ \left(\frac{df}{dx}\right)_0^2 x^2 + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{df}{dy}\right)_0^2 y^2 + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{df}{dz}\right)_0^2 z^2 + \dots \right\}$$

ou bien encore

$$f(x, y, z) = f_0 + df_0 + \frac{d^2 f_0}{1.2} + \dots$$

On aura

$$R = \frac{1}{1.2 \dots n} \left\{ V_1(\theta x, \theta y) - V_1(0, 0) \right\}$$

Maxima et Minima

Des Fonctions de Plusieurs Variables.

Proposons-nous de trouver les valeurs de x, y et z qui rendent maxima la fonction $f(x, y, z)$. — Par définition, $f(x, y, z)$ sera un maximum si: l'on a

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) < 0$$

pour des valeurs suffisamment petites de h, k et l , quels que soient les signes de ces valeurs. Si au contraire cette différence est positive dans les mêmes circonstances, $f(x, y, z)$ est un minimum.

Supposons donc que pour $x=a, y=b, z=c$, $f(x, y, z)$ soit un maximum ou un minimum. Si l'on regarde $f(x, b, c)$ comme une fonction de x , elle devra avoir un maximum correspondant à $x=a$. Si donc on pose $u = f(x, y, z)$, il faudra que pour $x=a, y=b, z=c$, $\frac{du}{dx}$ soit nul, infini, ou discontinu. Pour la même raison, il devra en être de même de $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$. D'où il résulte que si l'on suppose (ce qui est le cas le plus ordinaire) que ces trois fonctions soient continues, toutes les valeurs de x, y et z correspondant aux maxima et minima de u seront données par les trois équations

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \frac{du}{dy} = 0 \quad \frac{du}{dz} = 0$$

En se bornant au cas où ces dérivées sont continues, on peut s'aider de la série de Taylor pour reconnaître les solutions qui répondent à des maxima ou des minima, et celles qui sont à rejeter. Pour cela, on remarque que

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = h \frac{du}{dx} + k \frac{du}{dy} + l \frac{du}{dz} + R$$

et il a été démontré qu'on peut prendre h, k, l assez petits pour que la valeur absolue de la somme des termes qui contiennent h, k et l au premier degré surpassent le reste R . Il suit donc de là que le signe du second membre sera celui de

$$h \frac{du}{dx} + k \frac{du}{dy} + l \frac{du}{dz}$$

et que, si l'on n'avait pas à la fois

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \frac{du}{dy} = 0 \quad \frac{du}{dz} = 0$$

$f(x, y, z)$ ne pourrait être ni un maximum ni un minimum, puis qu'en changeant simplement le signe de h, k, l , le signe de $f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z)$ changerait aussi: on retombe donc sur le résultat déjà obtenu.

on a alors

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} h^2 + \frac{d^2u}{dy^2} k^2 + \frac{d^2u}{dz^2} l^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} hk + 2 \frac{d^2u}{dx dz} hl + 2 \frac{d^2u}{dy dz} kl \right\} + R$$

C'est ce groupe entre parenthèses qui donne son signe, pour des valeurs assez petites de h, k et l . - on peut le représenter par

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$$

Il faut chercher les conditions pour que ce polynôme conserve toujours le même signe pour des valeurs très-petites de h, k et l . - Mais si nous remplaçons h, k, l

pour mh, mk, ml , ce polynôme devient

$$m^2 \{ Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl \}$$

et nous voyons que si le polynôme proposé est positif toujours pour de très petites valeurs de h, k et l , il le sera pour des valeurs quelconques de ces accroissements. Il suffit donc de chercher les conditions pour que ce polynôme reste toujours positif ou toujours négatif pour des valeurs quelconques de h, k et l .

Généralement, on pourra le décomposer en une somme de trois carrés dont l'un contiendra h, k, l , le second h et k , et le 3^e. l seulement. — on peut s'écrire en effet

$$A \left\{ h^2 + 2 \frac{Dk+El}{A} h \right\} + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl$$

ou bien

$$A \left\{ h + \frac{Dk+El}{A} \right\}^2 - \frac{D^2 k^2}{A} - \frac{E^2 l^2}{A} - 2 \frac{DEkl}{A} + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl$$

ou encore

$$A \left\{ h + \frac{Dk+El}{A} \right\}^2 + B'k^2 + C'l^2 + 2F'kl$$

on posant pour abréger $B' = B - \frac{D^2}{A}$, $C' = C - \frac{E^2}{A}$, $F' = F - \frac{DE}{A}$

à son tour, le dernier polynôme peut s'écrire

$$A \left\{ h + \frac{Dk+El}{A} \right\}^2 + B' \left\{ k^2 + 2 \frac{F'l}{B'} k \right\} + C'l^2$$

ou bien

$$A \left\{ h + \frac{Dk+El}{A} \right\}^2 + B' \left\{ k + \frac{F'l}{B'} \right\}^2 + C''l^2$$

en posant

$$C'' = C' - \frac{F'^2}{B'}$$

La décomposition se trouve ainsi effectuée. —

Dans ce qui précède on a supposé ici que A, B' et C'' étaient différents de 0.

Examinons ce qui arriverait si l'une ou l'autre de ces quantités s'annulait?

1°. Soit $A=0$. alors le terme en h^2 disparaît, et il peut se présenter deux cas: ou bien D et E sont aussi nuls, l'événement que les termes en h^2 s'en vont, ou bien ces termes ne disparaissent pas tous deux. — Si D et E ne sont pas nuls à la fois, il n'y a ni maximum ni minimum: car le polynôme peut se mettre sous la forme $Ph+Q$; et, en donnant à h les valeurs $-\frac{Q}{P} \pm \alpha$, l'ensemble change de signe avec α . — Si, en même temps que A , D et E sont aussi nuls, le polynôme se réduit à

$$Bk^2 + CFkl + Cl^2$$

Il pourra se présenter deux cas: ou bien, h étant arbitraire, on fera $k=0$, $l=0$, et le polynôme s'annulant, la discussion portera sur les termes linéaires: ou bien on pourra constater que ce terme change de signe pour une autre combinaison de valeurs de h, k, l , et l'on n'aura alors ni maximum ni minimum.

2°. A n'est pas nul. Je le mets en facteur, et je considère le polynôme

$$A \left\{ h + \frac{Dk+El}{A} \right\}^2 + B'k^2 + C'l^2 + 2F'kl$$

on peut avoir $B'=0$, F' n'étant pas nul. alors il n'y a ni maximum ni minimum: car, en posant

$$k = -\frac{C'l}{2F'} \pm \alpha \quad h = -\frac{Dk+El}{A}$$

le signe du polynôme change avec celui de α : il n'y a donc ni max. ni minimum.

Si l'on a en même temps $B'=0$, $F'=0$, le polynôme devient

$$A \left\{ h + \frac{Dk+El}{A} \right\}^2 + C'l^2$$

Si A et C' sont alors de même signe, le Terme du 2^e ordre ne suffit plus pour la discussion: car si l'on fait $h = -\frac{Dh}{A}$, $l = 0$, le polynôme se réduit à deux quel que soit k . Dans les autres cas, le signe est Invariable.

Si A et C' ne sont pas de même signe, il n'y a pas de maximum ni de minimum possible: car, pour $l = 0$, le polynôme a le signe de A : pour $h = -\frac{Dh + Fl}{A}$, il a le signe de C' .

3°. B' peut n'être pas nul. Je prends alors la forme

$$A \left\{ h + \frac{Dh + Fl}{A} \right\}^2 + B' \left\{ k + \frac{F'l}{B'} \right\}^2 + C'' l^2$$

et je suppose $C'' = 0$. alors A et B' peuvent être de signes contraires, et il n'y a ni maximum ni minimum; ou bien ils sont de même signe, et les Termes du 2^e ordre ne suffisent plus pour la discussion.

Considérons maintenant le cas où A' , B' , C'' ne sont pas tous différents de zéro. La condition pour qu'il y ait maximum ou minimum est que tous trois soient de même signe. Mais sont en effet tous trois positifs ou négatifs, on ne peut annuler à la fois les trois carrés sans supposer $l = 0$, $k = 0$, $h = 0$: ce qui serait supposer que la fonction ne varie pas.

Si au contraire ils sont de signes différents, il n'y aura ni maximum ni minimum. Car soit par ex. $A > 0$, $B' < 0$, $C'' > 0$, on pourra disposer de h de manière à faire disparaitre le coefficient de B' , ou bien de l et h de façon que la forme négatif reste seul. on pourra donc à volonté faire varier le signe du polynôme: il ne peut donc y avoir

ni maximum ni minimum.

ainsi, les conditions du Maximum sont

$$\left. \begin{array}{l} A < 0 \\ B' < 0 \\ C'' < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B' = B - \frac{D^2}{A} \\ C'' = C' - \frac{F'^2}{B'} = C - \frac{E^2}{A} - \frac{(F - \frac{DE}{A})^2}{B - \frac{D^2}{A}} \end{array}$$

et celle du Minimum

$$\left. \begin{array}{l} A > 0 \\ B' > 0 \\ C'' > 0 \end{array} \right\}$$

et, en remplaçant B' et C'' par leurs valeurs

Maximum:

Minimum

$$\left. \begin{array}{l} A < 0 \\ D^2 - AB \neq 0 \\ (AF - DE)^2 - (E^2 - AC)(D^2 - AB) \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A > 0 \\ D^2 - AB < 0 \\ (AF - DE)^2 - (E^2 - AC)(D^2 - AB) < 0 \end{array}$$

} liser < là où il y a fort coëff. car $A < 0$ pour le maximum.

observons que $A = \frac{d^2 f}{dx^2}$, et que j'aurais pu aussi bien mettre en avant B ou E que A , D'orte quelcon doit avoir aussi $\frac{d^2 f}{dy^2} < 0$ et $\frac{d^2 f}{dz^2} < 0$, conditions souvent utiles.

Si il s'agissait d'une fonction de deux variables seulement, $f(x, y)$, il faudrait dans les résultats précédents supprimer E, C, F, F' . La dernière condition disparaît, et la dernière se réduisant à

$$\begin{array}{ll} A < 0 & D^2 - AB \neq 0 \quad \text{pour le Maximum} \\ \text{et} & \\ A > 0 & D^2 - AB < 0 \quad \text{" Minimum.} \end{array}$$

on peut arriver à ces résultats par une autre méthode, tout-à-fait dans le cas de deux variables.

Dans ce cas, la forme du 2^e ordre peut s'écrire ainsi

$$h^2 \left\{ A + B \left(\frac{k}{h} \right)^2 + 2D \frac{k}{h} \right\}$$

Pour que ce polynôme garde constamment le même signe, il faut que le trinôme entre parentèses soit le produit de deux facteurs imaginaires, en y considérant $\frac{k}{h}$ comme la variable: ce qui représente la condition

$$D^2 - AB < 0$$

Mais nous aurons un maximum si $B < 0$, un minimum dans le cas contraire. A' ailleurs la condition $D^2 - AB < 0$ fait voir que A et B sont de même signe: car le produit AB doit être positif.

Problème. — Partager un nombre a en trois parties telles que

$$f(x, y) = x^m y^n (a - x - y)^p$$

ait maximum ou minimum. on n'admettra que les valeurs arithmétiques différentes de zéro.

Il faudra poser

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{df}{dy} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} mx^{m-1} y^n (a-x-y)^p - px^m y^n (a-x-y)^{p-1} = 0 \\ nx^m y^{n-1} (a-x-y)^p - py^m x^n (a-x-y)^{p-1} = 0 \end{cases}$$

et comme nous n'admettons pas les solutions nulles, nous pouvons supprimer dans la 1^{re} eq. le facteur $x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1}$ et dans la 2^e, $x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1}$. Donc

$$\begin{cases} m(a-x-y) - px = 0 \\ n(a-x-y) - py = 0 \end{cases}$$

Donc

$$x = \frac{ma}{m+n+p} \quad y = \frac{na}{m+n+p} \quad z = a - x - y = \frac{pa}{m+n+p}$$

ce qui montre qu'on aura la solution en divisant a en 3 parties proportionnelles
à m, n, p .

Pour vérifier que cette solution donne un minimum, il faut calculer

$$A = \frac{d^2f}{dx^2} \quad B = \frac{d^2f}{dx dy} \quad C = \frac{d^2f}{dy^2}$$

et voir si les conditions nouvelles plus haut sont satisfaites. Il est facile de voir que les 3 dérivées partielles contiendront le facteur $x^{m-1} y^{n-1} (a-x-y)^{p-2}$, que je puis supprimer, puisqu'il est positif. Il reste alors pour $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$-(m+p)n \left\{ mnp \left(\frac{a}{m+n+p} \right)^{m+n+p-2} \right\}$$

à cause de la symétrie. Les facteurs compris entre les accolades, on remarque qu'il se répète dans les deux autres dérivées. Il est d'ailleurs positif. Donc nous conserverons

$$\text{pour } \frac{d^2f}{dx^2} : -n(m+p) \quad \text{pour } \frac{d^2f}{dy^2} : -m(n+p) \quad \text{pour } \frac{d^2f}{dxdy} : -mn$$

les 3 quantités sont < 0 . - on devra avoir en outre

$$m^2n^2 - mn(m+p)(n+p) < 0$$

$$mn < (m+p)(n+p)$$

$$0 < p^2 + p(m+n)$$

$$m+n+p > 0$$

Condition qui est évidemment remplie.

Maxima et Minima

D'une fonction Implicite de Plusieurs Variables Indépendantes.

Proposons-nous de chercher les maxima et minima d'une fonction

$$F(x, y, z, \dots, u)$$

de $n+p$ variables, sachant qu'entre ces variables il y a n relations exprimées par les Equations

$$(A) \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, \dots, u) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z, \dots, u) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x, y, z, \dots, u) = 0 \end{cases}$$

Les n équations détermineront n de nos variables en fonction des p autres, lesquelles seules seront indépendantes.

Cela posé, la valeur des variables qui rendent F un maximum ou un minimum doivent annuler la différentielle totale dF , D'où que, quelle que soient les variables qu'on regardera comme indépendantes, on devra avoir:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz + \dots + \frac{dF}{du} du = 0$$

et si l'on convient de regarder les p premières variables x, y, z, \dots comme indépendantes, les p premières quantités dx, dy, dz, \dots seront des accroissements arbitraires; les n dernières quantités telles que du seront les différentielles des n variables dépendantes considérées comme fonction des p premières. Et ces quantités du, \dots seront déterminées par les q suivantes, obtenues en différenciant la n relation (A)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_1}{dx} dx + \frac{dq_1}{dy} dy + \frac{dq_1}{dz} dz + \dots + \frac{dq_1}{du} du = 0 \\ \frac{dq_2}{dx} dx + \frac{dq_2}{dy} dy + \frac{dq_2}{dz} dz + \dots + \frac{dq_2}{du} du = 0 \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dx} dx + \frac{dq_n}{dy} dy + \frac{dq_n}{dz} dz + \dots + \frac{dq_n}{du} du = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi nous aurons ainsi en tout $n+1$ équations, entre lesquelles éliminant les n différentielles telles que du , nous arriverons à une q . unique entre les p accroissements arbitraires dx, dy, dz, \dots, dv , laquelle sera de la forme

$$P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz + \dots + P_p dv = 0$$

et comme les accroissements dx, dy, \dots, dv doivent rester arbitraires, nous devons avoir

$$P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 0 \quad \dots \quad P_p = 0$$

et ces équations, jointes aux n relations (A), serviront à déterminer les $m+p$ variables.

1^{re} élimination. Des différentielles totales telles que du peut le faire par la méthode des Indéterminées: il suffira de multiplier la 1^{re} de nos équations par des différentielles par 1, la 2^e par λ , la 3^e par μ , et ainsi de suite, et d'ajouter. Puis, on profitera de l'indétermination de λ, μ, ν, \dots pour égaler à zéro les coefficients des différentielles totales du... on aura ainsi n équations qui feront connaître les valeurs des n multiplications. on reportera ces valeurs dans les coefficients de dx, dy, dz, \dots, dv , qu'on égalera ensuite à zéro. - Mais cela revient évidemment à égaler de suite à zéro tous les coefficients de dx, dy, \dots, dv , ce qui donne les $m+p$ eq.

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dx} \lambda + \dots + \frac{d\varphi_n}{dx} \rho = 0 \\ \frac{dF}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dy} \lambda + \dots + \frac{d\varphi_n}{dy} \rho = 0 \\ \dots \\ \frac{dF}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dv} \lambda + \dots + \frac{d\varphi_n}{dv} \rho = 0 \end{array} \right.$$

qui, jointes aux n équations (A), serviront à déterminer les $2m+p$ inconnues $x, y, z, \dots, v, \lambda, \mu, \nu, \dots, \rho$.

Cette méthode nous montre qu'il est indifférent d'éliminer entre nos équations différentielles les différentielles totales telles que du plutôt que les accroissements arbitraires. Car elle fait voir que, quelles qu'aient les quantités qu'on éliminera, les eq. résiduelles seront toujours les mêmes, ce qu'on pouvait prévoir: car si dx, dy, dz, \dots, dv sont arbitraires, du... le sont aussi comme

Dépendant de dx, dy, \dots, dv .

Pour savoir si les valeurs qu'on vient d. Déterminer pour les inconnues fournissent des maxima ou des minima, il faut avoir recours aux Formes de 2^e. Dimension. Mais nous ne pourrions pas en calculer, qui deviennent de plus en plus compliqués.

Les maxima et les minima qu'on Déterminera de cette manière pour $F(x, y, z, \dots, u)$ ne seront pas des Max. ou Min. absolus, car les inconnues sont assujetties à satisfaire à n relations. Ce sont des Max. ou des Min. relatifs.

On peut remarquer encore que si l'on avait voulu chercher les Maxima ou Minima de $\varphi(x, y, z, \dots, u)$ par exemple, et si à $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ on joignait la condition $F = 0$, on serait conduit absolument aux mêmes Eq. Différentielles: mais les valeurs de x, y, z, \dots, u ne seraient plus les mêmes: car au lieu du système A, on a maintenant celui-ci:

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \quad \dots \quad \varphi_n = 0 \quad F = 0$$

Enfin, si l'on suppose que $\lambda, \mu, \nu, \dots, f$ ont les valeurs que nous leur avons données plus haut, et si l'on cherchait les Maxima ou Minima absolus de la fonction

$$F + \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 + \nu \varphi_3 + \dots + f \varphi_n$$

il faudrait égaler à zéro les dérivées partielles relatives à chacune des variables: ce qui représenterait encore les Equations (B).

Différentielle de l'arc à double

courbure.

Soit un arc quelconque CD d'une courbe dans l'espace. Prenons d'une manière arbitraire et un nombre quelconque des points E, F, \dots, M, M' sur cette courbe, et considérons la question du polygone gauche $CBE \dots MM'D$ inscrit dans l'arc CD . Or, si que ce périmètre a une limite déterminée lorsque ses sommets se rapprochent tous indéfiniment les uns des autres, en même temps que leur nombre augmente jusqu'à l'infini; après l'avoir démontré, nous conviendrons de prendre cette limite pour la longueur de l'arc CD .

Soient donc x, y, z les coordonnées d'un des sommets M , et $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ celles du sommet suivant M' . on a

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

D'où, en appelant P le périmètre du polygone

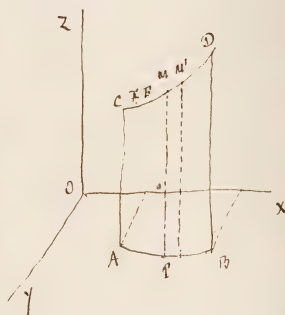
$$P = \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

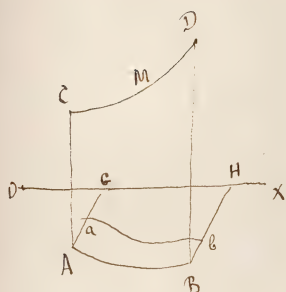
Si l'on suppose que Δx diminue jusqu'à zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tendront vers $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, en sorte que l'on peut écrire

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + d$$

et multipliant avec Δx , et

$$P = \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \sum \Delta x d$$





Montrons que chacun des termes dont se compose la valeur de P a une limite fixe. Alors, $\sum \Delta x$ tend vers zéro, soit en effet ε la plus grande des valeurs de Δ lorsque x passe d'une manière continue de $x=0G$ à $x=0H$. Nous aurons

$$\sum \Delta x < \sum \varepsilon \Delta x < \varepsilon \sum \Delta x$$

$\sum \Delta x = GH$. Donc $\varepsilon \sum \Delta x$ tend vers zéro.

Considérons maintenant la quantité

$$\sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

et regardons x comme la variable indépendante, de sorte que cette quantité est une fonction de x , posons-la égale à y , et soit y l'ordonnée d'une courbe plane ab . on aura

$$\sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sum y \Delta x$$

or à la limite, $\sum y \Delta x$ n'est autre chose que l'aire plane $GabH$. Donc $\lim P = \lim \sum y \Delta x =$ aire $GabH$. C'est cette quantité qui est la même que l'aire $CMD = S$. Alors il suit encore que

$$ds = d(\text{aire } GabH) = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

on conclut facilement de là que la limite du rapport de la corde MM' à l'arc qu'elle soutend est l'unité. En effet, quel que soit l'arc, on a

$$\frac{\text{Corde } MM'}{\text{arc } MM'} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}$$

à la limite est 1.

Tangentielles aux Courbes
à double courbure.

Cherchons les Eq. De la Tangente en un point x', y', z' d'une courbe donnée par les Eq.

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 & (1) \\ \varphi(x, y, z) = 0 & (2) \end{cases}$$

Cherchons pour cela les projections De la courbe sur les plans Des xy et Des xz . Pour obtenir la 1^{re}, il suffit d'éliminer z entre les deux Eq. (1) et (2); l'Eq. ainsi ainsi obtenue sera l'Eq. Du cylindre projetant cette courbe sur le plan xy , et par conséquent l'Eq. De la projection De la courbe sur ce plan. De même en éliminant y entre (1) et (2), on obtient l'Eq. De la projection De la courbe sur le plan Des xz .

Abandonnant, soient $V(x, y) = 0$ et $\Pi(x, z) = 0$. ces projections. La Tangente à la 1^{re}, au point x', y' sera

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x') \quad (3)$$

et la Tangente à la 2^{de}, au point x', z' sera

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'} (x - x') \quad (4)$$

Telles sont donc les Eq. De la Tangente à la courbe au point x', y', z' . Il ne reste plus qu'à déterminer $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dx'}$ au moyen Des Eq. (1) et (2). En les différentiant après avoir remplacé x, y, z par x', y', z' , on a

$$\begin{cases} \frac{df}{dx'} + \frac{df}{dy'} \frac{dy'}{dx'} + \frac{df}{dz'} \frac{dz'}{dx'} = 0 & (a) \\ \frac{d\varphi}{dx'} + \frac{d\varphi}{dy'} \frac{dy'}{dx'} + \frac{d\varphi}{dz'} \frac{dz'}{dx'} = 0 & (b) \end{cases}$$

on pourra de ces deux Equations Tirer les valeurs Des Coeffs.
-Lignes Différentiels en question, et les transporter Dans (3) et (4):
ce qui revient à éliminer $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dx'}$ entre (3) (4) (a) et (b).
on obtient, au moyen de (3) et (4)

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Y-y'}{X-x'} \quad \frac{dz'}{dx'} = \frac{Z-z'}{X-x'}$$

Reportant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dx'} (X-x') + \frac{df}{dy'} (Y-y') + \frac{df}{dz'} (Z-z') = 0 \\ \frac{dg}{dx'} (X-x') + \frac{dg}{dy'} (Y-y') + \frac{dg}{dz'} (Z-z') = 0 \end{array} \right.$$

on remarque que pour obtenir immédiatement ces Eq. De la
même sorte, on peut former les Différentiels totaux Des premiers
membres Des Eq. (1) et (2), et les équaler à zéro, après y
avoir remplacé les Différentiels dx , dy , dz par les
Différences $X-x$, $Y-y$, $Z-z$.

angle de torsion.

on appelle angle de torsion ou de seconde courbure l'angle de deux plans osculateurs consécutifs. — Il est utile de remarquer l'indépendance du deux courbures l'une par rapport à l'autre; de sorte que l'angle de contingence étant donné, celui de torsion peut être quelconque et même nul; mais l'angle de contingence ne peut être nul sans que l'angle de torsion ne soit nul pour cela même.

Pour déterminer l'angle de deux plans osculateurs aux points m et m' d'une courbe, on prend m pour l'origine d'un perp. à ces plans: leur angle sera l'angle cherché. De lors la marche à suivre, est la même que pour l'angle de contingence. Sans répéter les raisonnements faits alors, nous arriverons à l'égalité

$$\varphi = \sqrt{(d \cos \lambda)^2 + (d \cos \mu)^2 + (d \cos \nu)^2}$$

P. 1. \cos du plan osculateur étant

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0$$

nous avons

$$\cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \cos \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \cos \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Mais, pour nous en servir pour simplifier les calculs de la suite, faisons, observons que pour l'angle de contingence nous avons

$$\xi = \sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}$$

λ, μ, ν sont donc les angles des axes avec la perp. au plan osculateur.

et qu'on est arrivé à

$$\varepsilon = \frac{1}{ds^2} \sqrt{(dy d^2x - dx d^2y)^2 + (dx d^2z - dz d^2x)^2 + (dz d^2y - dy d^2z)^2}$$

Avec le cas inclus, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont remplacés par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, ou bien pour $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ en posant $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$
 Donc nous aurons

$$\varphi = \frac{1}{D^2} \sqrt{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}$$

Cherchons maintenant la valeur de chacun du binôme

$$B = dx d^2x - dz d^2z \quad dB = dx d^3x - dz d^3z$$

$$C = dx d^2y - dy d^2x \quad dC = dx d^3y - dy d^3x$$

Donc

$$\frac{BdC - CdB}{dx} = dx (d^2y d^3z - d^2z d^3y) + dy (d^2x d^3x - d^2x d^3z) + dz (d^2x d^3y - d^2y d^3x)$$

valeur symétrique. Donc

$$\frac{BdC - CdB}{dx} = \frac{AdB - BdA}{dx} = \frac{CdA - AdC}{dy}$$

Donc chacun de ces rapports est égal à

$$\sqrt{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Ainsi ces quantités' est égal à $\frac{\varphi D^2}{ds}$. Donc

$$\varphi = ds \frac{dx (d^2y d^3z - d^2z d^3y) + dy (d^2x d^3x - d^2x d^3z) + dz (d^2x d^3y - d^2y d^3x)}{(dy d^2x - dx d^2y)^2 + (dx d^2z - dz d^2x)^2 + (dz d^2y - dy d^2z)^2}$$

Remarques Diverses

sur les Courbes Gauches.

Une courbe à double courbure peut, comme une courbe plane, présenter des points singuliers: Il peut arriver pour exemple que trois éléments consécutifs soient dans un même plan. - Pour déterminer un tel point, on égalera à zéro l'angle de Torsion, en y prenant x pour variable indépendante: ce qui donnera, en divisant par dx^2 pour avoir une Eq. à formes finies

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2x}{dx^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

à cette Eq. De condition on associera les Eq. De la courbe, et l'on aura ainsi trois Eq. pour déterminer les coordonnées x, y, z du point singulier recherché.

Pour que la courbe soit tout entière dans un même plan, il faut que l'angle de Torsion soit nul quelque valeur qu'on donne à x, y et z étant remplacés par leurs valeurs en fonctions d' x dérivés des Eq. De la courbe. - Cette condition est toujours vérifiée pour les courbes planes: car on peut les représenter par l'intersection d'un plan $ax+by$ et d'une surface $f(x, y, z)=0$. or, si nous différencions la 1^{re} équation

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{d^2z}{dx^2} = b \frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{d^3z}{dx^3} = b \frac{d^3y}{dx^3}$$

Pour conséquent, la quantité $d^2y d^2x - d^2x d^2y$ devient

$$b d^2y d^2y - b d^2y d^2y$$

quantité évidemment nulle.

Si l'angle de contingence est nul pour tous les points d'une courbe, tous les côtés du polygone infinitésimal inscrit dans cette ligne sont dans le prolongement l'un de l'autre, et par conséquent cette ligne est droite. — La condition pour qu'une ligne soit droite peut donc s'exprimer par l'éq. différentielle

$$(dy d^2x - dx d^2y)^2 + (dx d^2x - dx d^2x)^2 + (dx d^2y - dy d^2x)^2 = 0$$

laquelle devra être vérifiée quels que soient x, y et z . ou bien, en prenant x pour variable indépendante, et dérivant par d^2x ,

$$\left(\frac{dy}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = 0$$

ou bien

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

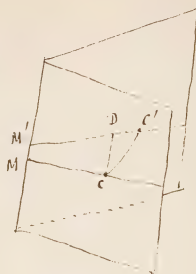
Il est facile de voir que ces conditions sont toujours vérifiées pour une ligne droite, dont les éq. sont

$$\begin{cases} y = bx + \beta \\ z = cx + \gamma \end{cases}$$

Le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe à double courbure n'est pas une développée de cette courbe: car les normales à la courbe ne sont pas tangentes à celui-ci. — En effet, si les normales étaient tangentes, la distance CD de deux normales consécutives devrait être un infiniment petit du second ordre. or j'en ai démontré qu'il n'en est pas ainsi. — Soient en



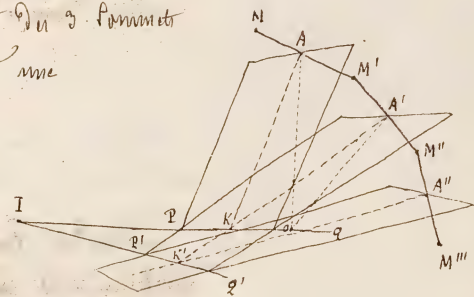
soient les deux plans osculateurs en deux points voisins: les deux courbes de courbure sont contenues dans ces plans, ainsi que les deux normales. Soit la distance CD du centre C à la normale $M'C'$ et au moins égale à la perp. abaissée de C sur le second plan. Mais cette perp. est un infiniment petit de même ordre quel que soit q des deux plans, et par conséquent du 1^{er} ordre en général. Soit CD est aussi un infiniment petit du 1^{er} ordre.



En général, les Normales successives à une Courbe gauche ne se rencontrent pas. Cependant, une telle courbe a une infinité de Développées. C'est ce que nous allons voir.

Surface Polaire. — Développées.

Supposons ainsi dans une courbe à double courbure un polygone gauche $M'M''M'''$. Par le milieu A de MM' menons un plan perp. à ce côté, et faisons de même aux milieux des côtés suivants. Les deux premiers plans se coupent suivant une droite PQ qui est le lieu des points également distants de 3 sommets M, M', M'' . Les 2^e et 3^e plans se coupent suivant une droite $P'Q'$, et ainsi de suite. L'ensemble des droites ainsi déterminées définit une surface polyédrale composée d'éléments V . Les éléments plans indéfinis: cette surface est développable: car, en faisant tourner convenablement chacun des éléments autour d'une des droites qui le déterminent, de manière à le ramener dans le plan de l'élément précédent, on rabattra la surface tout entière sur le plan du premier élément sans déformer ni duplication. — Faisons mais.



tenant à la limite. Le polygone deviendra la Courbe donnée: chaque droite PQ sera l'élément des parties du cercle osculateur en chaque point M de la courbe, et la surface limite de ces droites sera la Surface polaire, développable comme le cylindre dont elle est la limite.

Les lignes $PQ, P'Q'$ se coupent en un point I : car elles sont toutes deux dans un même plan, celui qui passe par A' . L'élément des intersections successives de ces droites, ou l'élément du point I , est à la limite l'élément de rebroussement de la Surface polaire. Ailleurs le point I est le point également distant des 2 sommets m, m', m'', m''' : à la limite, il est le centre de la Sphère osculatrice: l'élément de rebroussement de la surface polaire est donc l'élément des centres des sphères osculatrices à la courbe donnée.

Cette surface polaire renferme une infinité de développés de la courbe. Par A , je mène dans le plan APQ une droite quelconque AK ; par A' et K , je mène une seconde droite qui rencontre $P'Q'$ en K' ; je joins de même $A''K'$, etc. - J'observe d'abord que AK et $A'K'$ sont également inclinés sur PQ : en effet, de AQ j'abaisse AO perp. sur PQ , et je joins $A'O$. Ces deux droites sont dans un même plan perp. à PQ . Or les triangles AKO et $A'KO$ sont égaux (rectangle en O , KO commun, $AO = A'O$). Donc l'angle $AKO = A'KO$.

Maintenant, l'ensemble des points K, K' .. détermine une polygone qui à la limite devient une courbe dont les droites AK, AK' sont des tangentes. Cette courbe est une développée. En effet sur le contour polygonal $KK'K''$.. appliquons un fil dont l'extrémité libre aboutit en A . Si nous développons ce fil de manière à lui faire prendre la direction $K'A'$, son extrémité viendra en A' : en effet, $AK = A'K'$, et l'inclinaison de ces deux droites sur PQ est la

même ; en sorte que le fil passera successivement par tous les points A, A', A'' ... donc, à la limite, il décrira la courbe MM'' .

Le point M étant arbitraire, on voit qu'il existe une infinité de développés de la courbe donnée.

Si l'on suppose d'une courbe plane, la surface polaire serait un prisme, et à la limite, une surface cylindrique ; sur laquelle on pourra encore trouver une infinité de développés.

Ces développés jouissent d'une propriété remarquable ; c'est que, lorsque la surface polaire est développée sur un plan, elle devient toutes les lignes droites. Car, si nous considérons d'abord la surface polyédrale et les polygones inscrits dans les développés, il résulte de ce que les droites BQ, QAK, AK sont également inclinées sur BQ , que les deux droites s'appliqueraient l'une sur l'autre quand le plan ABQ s'appliquerait sur ABQ . — Cette propriété est encore vraie à la limite. On peut donc dire que sur la surface polaire, le plus court chemin entre deux points est l'arc de développement qui passe par ces deux points.

Dans le cas particulier d'une courbe plane, toutes les développés sont des hélices : car les génératrices de la surface polaire étant toutes parallèles, les tangentes à la développée sont inclinées sur elles d'un angle constant. Dans le développement de la surface, les hélices deviennent des droites : donc le plus court chemin entre deux points sur la surface du cylindre est l'arc d'hélice qui les joint. On voit aussi que, parmi cette infinité de développés d'une courbe plane, une seule est plane, et c'est celle que nous avons considérée déjà comme la développée proprement dite.

Il reste à appliquer le calcul à la recherche des lignes et des surfaces dont nous venons de parler.

1°. Droite Polaire. — Cette Droite est l'intersection de deux plans normaux consécutifs. Le premier a pour équation

$$(1) \quad (x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz = 0$$

et cet éq. peut être considérée comme une des éq. de la Droite. Je la représenterai par $F=0$. Soient $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées du point voisin. Dans cette éq. du plan normal en ce point, il faudra faire ces changements dans $F=0$; ce qui donnera

$$F + dF + \frac{d^2 F}{1,1} + \dots = 0$$

Mais si nous considérons cette éq. comme la 2°. éq. de la Droite polaire, elle se simplifiera en vertu de la 1ère, et en outre, $d^2 F$ étant nul à la limite vis-à-vis de dF , il restera

$$dF = 0$$

ou bien

$$(2) \quad (x'-x)d^2 x + (y'-y)d^2 y + (z'-z)d^2 z - dS^2 = 0$$

2°. Surface Polaire. — Cette surface étant telle de la Droite que je viens de déterminer, il suffira pour l'obtenir d'éliminer x, y, z entre les éq. (1) et (2) et celles de la courbe.

3°. Centre de la Sphère osculatrice. — Il est déterminé par l'intersection d'une 1ère Droite Polaire dont les éq. sont (1) et (2), avec la Droite polaire infiniment voisine. Pour obtenir cette dernière, il faut dans (1) et (2) changer x en $x+dx$, y en $y+dy$, z en $z+dz$; ce qui donnera

$$(3) \quad F + dF + \frac{d^2 F}{1,1} + \dots = 0$$

$$(4) \quad dF + \frac{d^2 F}{1,1} + \frac{d^3 F}{1,1,2} + \dots = 0$$

Mais si nous considérons simultanément les 4 éq. (1) (2) (3) (4) comme déterminant les coordonnées du point cherché, alors les deux dernières deviennent

$$dF = 0 \quad d^2 F = 0$$

La tâche que nous avons pour déterminer les coordonnées x, y, z
 du point cherché, les 3 eq.

$$F = 0 \quad dF = 0 \quad d^2F = 0$$

ou bien

$$(x' - x) dx + (y' - y) dy + (z' - z) dz = 0$$

$$(x' - x) d^2x + (y' - y) d^2y + (z' - z) d^2z = ds^2$$

$$(x' - x) d^3x + (y' - y) d^3y + (z' - z) d^3z = 3 ds ds^2$$

2°. arc de Rebroussement de la Surface Polaire. — Cette arc étant
 celui des centres des sphères osculatrices, il suffira pour l'obtenir
 d'éliminer x, y, z entre les deux eq. de la courbe et les trois que
 nous avons de trouver: D'où résulteront les deux eq. de la
 courbe cherchée.

Helice.

L'Helice est le lieu des points de la surface du cylindre de hauteur h au-dessus du cercle de base et dans un rapport constant avec la longueur de l'arc de ce cercle compris entre le pied de cette hauteur et une origine fixe, qui est le point où l'Helice rencontre le cercle de base.

Prends le plan de base pour plan des xy , pour axe des x la droite passant par l'origine A , et pour axe des y l'axe même du cylindre: et soit M un point de l'Helice. Pour déterminer ses coordonnées ox , oy et oz , je prends pour inconnue variable l'angle $BOA = u$, et je désigne par R le rayon de base du cylindre. Nous aurons d'abord

$$y = R \sin u \quad x = R \cos u$$

Puis, d'après la définition de l'Helice,

$$MB = m \cdot \text{arc } AB$$

on trouve la constante dont j'ai parlé, et qui a pour valeur $\frac{h}{2\pi R}$. Et l'on a $AB = Ru$. Donc

$$z = m Ru$$

Les trois eq. sont celles des projections de l'Helice sur les 3 plans coordonnés. on peut éliminer u successivement. entre deux de ces eq. Mais il vaut mieux conserver cette indéterminée.

1°. angles de la tangente avec les axes. — Nous savons que ces 3 angles α, β, γ ont pour valeurs générales

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds} \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

et nous avons

$$dx = -R \sin u \, du \quad dy = R \cos u \, du \quad dz = m R u \, du$$

$$ds = R \, du \sqrt{1+m^2}$$

Donc

$$\cos \alpha = -\frac{\sin u}{\sqrt{1+m^2}} \quad \cos \beta = \frac{\cos u}{\sqrt{1+m^2}} \quad \cos \gamma = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

or la valeur de $\cos \gamma$ est celle du sinus de l'angle dont la tangente est m . Si donc nous menons la tangente et la sous-tangente, l'angle MTz de ces deux droites est constant, et a pour tangente m : propriété connue de l'Helice, qu'on exprime ordinairement en disant que la tangente fait un

angle constant avec la génératrice du cylindre qui passe au point de contact.
 on peut encore conclure de là que la courbe est gauche. Considérons en effet le point.
 une de la polygone tracé sur le prisme dont le cylindre et l'hélice sont des projections.
 linéaires: deux éléments consécutifs ne sont pas dans un même plan: car si
 nous transportons ces 2 éléments parallèlement à eux-mêmes en un même
 point d'une génératrice, comme tous deux sont également inclinés sur la
 génératrice, il s'ensuit qu'ils ne peuvent être dans un même plan.

Si nous calculons la distance BT , au moyen du triangle rectangle
 MBT , nous trouvons

$$BT = \frac{r}{m} = Ru = \text{arc } BA.$$

Il s'agit d'être quelcun du point M et la développante du cercle de base.
 de là encore une nouvelle génération d'hélice. Soit MTB un angle indé-
 fini quelconque: si nous plaçons son sommet en A , et si nous enveloppons
 sur le cylindre de manière à appliquer BT sur le cercle de base, la droite
 MT décrira une hélice.

2°. Plan normal. - Son Eq. générale étant

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0$$

nous aurons, en y substituant les valeurs des différentielles, et divisons par $R \cos u$,

$$-(x' - x) \sin u + (y' - y) \cos u + m(z' - z) = 0$$

On observe avant que $x \sin u = y \cos u$,

$$x' \sin u - y' \cos u - m(z' - z) = 0$$

3°. Plan osculateur. - on a en général pour son Eq.

$$(x' - x)(dyd^2x - dx d^2y) + (y' - y)(dx d^2x - dx d^2z) + (z' - z)(dx d^2y - dy d^2x) = 0$$

En nous les différentielles secondes

$$d^2x = -R \cos u du^2 \quad d^2y = -R \sin u du^2 \quad d^2z = 0$$

Substituant et réduisant, on a

$$m x' \sin u - m y' \cos u + z' - z = 0$$

Quelle est l'inclinaison de ce plan sur le plan de base? Cet angle est celui
 d'une normale au plan avec l'axe des z : il est donc donné par l'Eq.

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \cos. \text{arc } \frac{1}{m}$$

4°. Rayon de courbure. - Nous savons d'abord que cette droite est
 située dans le plan osculateur. Pour trouver sa direction, nous allons
 chercher les cos. des angles avec les axes par les formules

$$\cos \lambda = \frac{d \frac{dx}{ds}}{1} \quad \cos \mu = \frac{d \frac{dy}{ds}}{1} \quad \cos \nu = \frac{d \frac{dz}{ds}}{1}$$

Partiellen et simplifiant, on a

$$q = \frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2} du = \frac{m du}{\sqrt{1+m^2}} = m \varepsilon = \text{const.}$$

6°. Droite et Surface Polaire. — 1^{re} Eq. Du plan normal étant

$$X \sin u - Y \cos u = m(Z - r)$$

et r étant égal à mRu , on aura pour 1^{re} Eq. de la Droite polaire

$$\begin{cases} X \sin u - Y \cos u = m(Z - r) \\ X \cos u + Y \sin u = m^2 R \end{cases}$$

Pour avoir la surface polaire, il suffira d'éliminer u entre ces Eq. Pour y parvenir, j'écris la somme des carrés :

$$X^2 + Y^2 = m^2 \{ (Z - mRu)^2 + m^2 R^2 \}$$

$$(Z - mRu)^2 = \frac{X^2 + Y^2 - m^4 R^2}{m^2}$$

$$mRu = Z \pm \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - m^4 R^2}}{m}$$

Partiellen dans la 2^e. Eq. cette valeur de u , j'obtiens pour la surface polaire 1^{re} Eq.

$$X \cos \left[\frac{Z \pm \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - m^4 R^2}}{m}}{mR} \right] + Y \sin \left[\frac{Z \pm \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - m^4 R^2}}{m}}{mR} \right] = -m^2 R$$

Pour avoir la trace sur le plan des XY , il faut faire $Z = 0$, nous pourrions en même temps $m^2 R = r$:

$$(a) \quad X \cos \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}}{r} + Y \sin \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}}{r} = -r$$

or cette courbe est la développante du cercle dont le rayon est $r = m^2 R$. En effet, la Droite polaire est dans le plan tangent au cylindre de rayon r : car elle est perp. au point R au rayon de courbure MR , et même au plan osculateur du point M . Par suite elle est inclinée sur le plan des xy d'un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$. Il en résulte qu'elle est tangente à l'Hélice lieu des points R : car la tangente de l'inclinaison d'une droite touchant l'Hélice sur le plan de base est en général $\frac{h}{2\pi r}$. Donc ici, c'est

$$\frac{h}{2\pi R m^2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}.$$

Il suit d'autre part nous avons démontré que la trace de la tangente à l'Hélice sur le cercle de base décrit la développante de ce cercle.

Ainsi celui des points où le plan des xy est rencontré par la Droite polaire, ou la tangente à l'Hélice lieu des points R , est la développante du cercle de rayon $r = R + m^2$.

on peut d'ailleurs vérifier ce résultat en développant l'équ. (1) de la développante d'un cercle.

Prenez pour triangle auxiliaire l'angle $\angle BOA = \theta$. (Fig. naturelle de la développante)

$$BM = \text{Arc } AOB$$

$$BM = r\theta$$

D'ailleurs $BM^2 = OM^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$, $r^2\theta^2 = x^2 + y^2 - r^2$, et aussi

$x \cos \theta + y \sin \theta = r$. (en projetant le triangle OM de sa résultante OM sur OB).

En y remplaçant θ par sa valeur, il vient :

$$x \cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} + y \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} = r$$

Si nous avons remplacé les x et les y dans l'équation (1), celle dans laquelle ils sont remplacés par l'équ. (a). En faisant le développement convenable, on voit que les deux Eq. coïncident.

Donc, on peut trouver l'Eq. de la surface Polaire comme lieu des tangentes à l'Hélice Decrite par le centre de courbure de l'Hélice primitive. — En considérant d'ailleurs par r le rayon de base du cylindre sur lequel est tracée cette Hélice, nous aurons pour les équations

$$\begin{aligned} x &= r \cos \frac{2\pi z}{h} \\ y &= r \sin \frac{2\pi z}{h} \end{aligned} \quad \left| \text{D'où} \right. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dz} = -\frac{2\pi r}{h} \sin \frac{2\pi z}{h} \\ \frac{dy}{dz} = \frac{2\pi r}{h} \cos \frac{2\pi z}{h} \end{cases}$$

Les Eq. de la tangente seront donc, au point $z = z$,

$$\begin{cases} X - r \cos \frac{2\pi z}{h} = -\frac{2\pi r}{h} \sin \frac{2\pi z}{h} \cdot (Z - z) \\ Y - r \sin \frac{2\pi z}{h} = \frac{2\pi r}{h} \cos \frac{2\pi z}{h} \cdot (Z - z) \end{cases}$$

Pour avoir le lieu cherché, il suffit d'éliminer z entre ces Eq. Mais d'ces deux Eq. on peut en substituer d'autres. Pour cela, éliminons d'abord les seconds membres en multipliant la 1^{re} Eq. par $\cos \frac{2\pi z}{h}$, la 2^e par $\sin \frac{2\pi z}{h}$, et ajout.

$$X \cos \frac{2\pi z}{h} + Y \sin \frac{2\pi z}{h} - r = 0$$

Éliminons maintenant les termes qui contiennent z dans les 1^{ers} membres :

$$X \sin \frac{2\pi z}{h} - Y \cos \frac{2\pi z}{h} = -\frac{2\pi r}{h} (Z - z)$$

Les 2 Eq. remplaçant les précédentes, ce sont celles de la Droite Polaire. Donc, en éliminant z , nous obtenons pour l'Eq. déjà trouvée pour la surface polaire.

Sur la courbure des surfaces.

on a trouvé (p. 145)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha$$

relation remarquable entre les rayons de courbure des sections normales principales et celui d'une section quelconque, et qui a été trouvée d'abord par Euler.

Observons que si l'on compare deux sections normales prop. l'une à l'autre, leurs rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 se déduisent de cette formule en y faisant successivement $\alpha = \alpha'$ et $\alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}$: ce qui donne

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha' + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha'$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \alpha' + \frac{1}{R_2} \cos^2 \alpha'$$

ajoutant :

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

D'où ce théorème :

La somme des inverses des rayons de courbure de deux sections normales à angle droit est constante, et égale à la somme des inverses des rayons de courbure des sections principales.

Lorsque les deux rayons principaux sont de même signe, le plus petit des deux est minimum parmi tous les rayons de courbure de diverses sections normales, et le plus grand est

maximum entre deux. — En effet, si nous supposons R_1 et R_2 deux positifs, et $R_1 < R_2$: pour $\alpha = 0$, $f = R_1$ et, α croissant jusqu'à 90° , f augmente comme le montre la formule mise sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin^2 \alpha$$

Car R_1 étant $< R_2$, la différence qui multiplie $\sin^2 \alpha$ est négative. — Enfin, quand $\alpha = 90^\circ$, $f = R_2$: D'ailleurs, si l'on écrit la formule

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_2} - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \cos^2 \alpha$$

on voit que, pour toute valeur de α ,

$$f > R_1 \text{ et } f < R_2$$

ce que j'ai voulu démontrer.

Nous avons trouvé pour caractéristique générale des surfaces convexes que $S^2 - r^2$ soit < 0 . or dans le cas actuel, cette condition se réduit à $-r^2 < 0$, et elle est toujours satisfaite. Car on a $-r^2 = -\frac{1}{R_1 R_2}$. — La surface est donc convexe. Ce que l'on voit d'ailleurs en observant que, quelle que soit la valeur de α , f est constamment de même signe que R_1 et R_2 .

Considérons une ellipse dont les demi-axes soient $\sqrt{R_1}$ et $\sqrt{R_2}$, son eq. sera

$$\frac{y^2}{R_2} + \frac{x^2}{R_1} = 1$$

et représentant par f le carré d'un rayon vecteur de cette ellipse faisant avec l'axe des x l'angle α . Nous aurons

$$x = \sqrt{f} \cos \alpha \quad y = \sqrt{f} \sin \alpha$$

et, en remplaçant x et y par ces valeurs,

$$\frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{f}$$

c.à.d. la relation qui existe entre les deux rayons principaux et le rayon de courbure d'une section faisant avec ox l'angle α .
Ainsi

Théorème. - Les rayons de courbure des diverses sections normales d'une surface peuvent être représentés par les carrés des rayons recteurs d'une ellipse dont les axes seraient les racines carrées des rayons de courbure principaux.

L'angle α est celui que fait le plan de la section considérée avec celui de la section principale dont le rayon est minimum.

Supposons maintenant les deux rayons de signes contraires, par ex. $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$. Evidemment la surface sera non-convexe en M , puisqu'en ce point il y aura des sections placées au-dessus du plan tangent, d'autres au-dessous. - Pour déterminer les limites des unes et des autres, mettons en évidence le signe de R_1 et R_2 dans la formule d'Euler :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha - \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha$$

En faisant varier α à partir de zéro, le rayon f commence par être positif et égal à R_1 , puis il va en croissant jusqu'à l'infini, valeur qu'il atteint lorsque α prend la valeur α' qui est terminée par l'équation

$$\frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha' - \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha' = 0 \quad \text{donc} \quad \tan^2 \alpha' = \frac{R_2}{R_1}$$

Si donc on tire dans le plan tangent deux droites qui fassent chacune avec MX un angle α' , ces droites seront les traces des deux plans normaux limites, tels que toutes les sections comprises entre ces deux droites auront des rayons de courbure positifs, et par suite seront au-dessus du plan tangent.

Si α augmente au-delà de α' , f devient négatif, et décroît en valeur absolue depuis l'infini jusqu'à $f = -R_1$ pour $\alpha = 90^\circ$. à partir de là, f augmente de nouveau jusqu'à l'infini, qu'il atteint pour $\alpha = 180^\circ - \alpha'$. - On voit ainsi que toutes les sections comprises dans l'arc d'angle formé par les droites dont j'ai parlé sont toutes situées au-dessus du plan tangent. Parmi ces rayons négatifs, R_1 est un maximum algébrique.

Dans le cas actuel, les rayons de courbure peuvent être représentés par les carrés des rayons vecteurs d'une hyperbole dont les axes seraient $\sqrt{R_1}$ et $\sqrt{R_2} \sqrt{-1}$. En effet, cette hyperbole a pour équation

$$\frac{x^2}{R_1} - \frac{y^2}{R_2} = 1$$

Ainsi en désignant par \sqrt{f} un rayon vecteur faisant avec l'axe des x un angle α , nous aurons

$$x = \sqrt{f} \cos \alpha \quad y = \sqrt{f} \sin \alpha$$

Donc

$$\frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha - \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{f}$$

Puis que α est moindre que l'angle de l'asymptote avec l'axe des x , angle dont la tangente est

$$\tan \alpha' = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

est, tant que les rayons de courbure sont positifs, ils sont représentés en réalité par les carrés des rayons vecteurs de l'hyperbole.

Ils le seront encore au-delà si l'on joint à cette 1^{re} hyperbole l'hyperbole conjuguée qui a mêmes asymptotes, mais dont l'axe transverse sera $\sqrt{R_2}$. — Les rayons vecteurs de cette 2^e hyperbole représenteront les valeurs absolues des rayons de courbure négatifs.

Lorsque $R_1 = R_2$, la formule montre que, quel que soit α , $\rho = R_1$. alors toutes les sections normales faites autour de M ont une courbure égale, et peuvent être considérées toutes comme des sections principales. En effet, l'angle α qui détermine la position de ces sections principales devient indéterminé : car la valeur

$$\alpha \rho = \frac{2s}{r-t}$$

devient $\alpha \rho = \frac{0}{0}$; puisque $s = 0$ pour l'hyperbole, et $r = t$ en vertu des relations $R_1 = \frac{1}{r}$, $R_2 = \frac{1}{t}$ et $R_1 = R_2$.

Un tel point, jouissant de la propriété que toutes les sections normales qui y passent ont même courbure, s'appelle un ombilic. ainsi, tous les points d'une sphère sont des ombilics. De même une surface de révolution a un ombilic à chacun des points où sa courbe méridienne est rencontrée par l'axe ; qu'on quitte ce point le plan tangent soit perpendiculaire à l'axe.

497.

498.

499.

Compléments

de

Calcul Integral.

500.

unusquisque

et

habetur in

Sur l'intégration de l'expression

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on a trouvé, pour m positif, la formule de réduction

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si m est négatif, la formule, bien de réduire l'exposant, s'augmenterait au contraire. alors on la résout pour rapport à l'intégrale du second membre, et, en posant $m-1 = m'$, d'où $m' = 2-m$, on a, en supprimant les accents

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}}$$

Lorsque m sera pair, on arrivera, en faisant $m=2$, à cette égalité

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

et la formule donne immédiatement une intégrale finie.

Si m est impair, la plus petite valeur qu'on puisse lui attribuer est 3, alors

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$$

ainsi on est ramené à intégrer $\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$, ou bien

$$\int x^{-1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

différentielle de la forme ordinaire, dont nous pouvons



Ex.

intégrer par la méthode d'Euler. Car ici $\frac{m+1}{n}$ est entier puisqu'il est
ent. Nous pouvons poser

$$1-x^2 = z^2 \quad \text{d'où} \quad x^2 = 1-z^2$$

$$x = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x dx = -z dz$$

Ainsi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{dz}{1-z^2} = - \int \frac{dz}{2(1-z)} - \int \frac{dz}{2(1+z)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1-z} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z} + C$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1-z}{1+z} + C = \frac{1}{2} \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C = \frac{1}{2} \int \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

Rem. - Cette intégration se fera d'une manière plus rapide en
observant que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = - \int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} \right) + C$$

$$= - \int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C = - \int \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C = \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

nous retrouvons le même résultat.

Intégration des Différentielles Transcendentes.

on a trouvé (p. 228)

$$\int a^x p dx = \frac{a^x}{\frac{da}{dx}} p dx - \int \frac{a^x}{\frac{da}{dx}} \frac{dp}{dx} dx$$

ce qui permet de ramener p à une constante, si p est une fonction rationnelle et entière.

Cette méthode s'applique à la fonction

$$\int a^x x^n dx$$

pourvu que n soit positif.

Si n était négatif, comme les différentiations successives, bien de remplir le but qu'on se propose, augmenteraient l'exposant, alors on intègre par parties en faisant porter la différentiation sur a^x . Il vient ainsi

$$\int a^x x^{-n} dx = \frac{a^x x^{-n+1}}{-n+1} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{x^{n-1}} \frac{a^x}{\frac{da}{dx}} dx$$

ou

$$\int \frac{a^x}{x^n} dx = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)\frac{da}{dx}} \int \frac{a^x}{x^{n-1}} dx$$

Cette formule n'est plus applicable dès que $n=1$: C'est qu'alors en effet, il n'est plus possible d'intégrer sous forme finie.

L'intégration directe par parties donne alors

$$\int \frac{a^x}{x} dx = a^x \log x - \log a \int a^x \log x dx$$

formule plus compliquée que l'intégrale proposée.

occupons-nous maintenant de la fonction différentielle

$$(dx)^n p dx$$

Dans laquelle, pour qu'il soit possible d'intégrer, la fonction p doit avoir la même caractéristique que tout-à-d'égale. — Dans ce cas, la différentielle du logarithme étant algébrique, il faudra faire porter l'intégration sur $p dx$, toutes les fois qu'elle pourra intégrer cette fonction. Soit $\int p dx = q$. on aura

$$\int (dx)^n p dx = q (dx)^n - \int \frac{q n (dx)^{n-1}}{x} dx$$

Si maintenant on sait intégrer $\frac{q}{x} dx$, on continuera de la même manière. Soit $\int \frac{q}{x} dx = r$:

$$\int \frac{q n (dx)^{n-1}}{x} = n (dx)^{n-1} r - n(n-1) \int (dx)^{n-2} r \frac{dx}{x}$$

et ainsi de suite.

Soit par exemple

$$\int (dx)^n x^m dx$$

L'intégration par parties nous donne

$$\int (dx)^n x^m dx = \frac{(dx)^n x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int (dx)^{n-1} x^m dx$$

ainsi, par un hasard de calcul, l'exposant de dx diminue, tandis que celui de x ne varie pas. — En continuant, nous aurons donc

$$\int (dx)^n x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ (dx)^n - \frac{n}{m+1} (dx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} (dx)^{n-2} - \dots \right\} + C$$

Lorsque $m = -1$, cette formule devient illusoire, et on a alors

$$\int (dx)^n \frac{dx}{x}$$

qui s'intègre immédiatement.

Si l'exposant m était négatif, la marche précédente compliquerait cet exposant, puis on le diminuerait. alors on trait la même question d'une manière, c.à.d. qu'on résout pour rapport à l'intégrale du second membre. on a ainsi:

$$\int (dx)^{n-1} x^m dx = \frac{x^{m+1} (dx)^n}{n} - \frac{m+1}{n} \int (dx)^n x^m dx$$

Passant maintenant $n-1 = -n$, nous aurons

$$\int \frac{x^m dx}{(dx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(dx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(dx)^{n-1}}$$

Cette formule pourrait d'ailleurs se trouver directement en remarquant que $\int \frac{x^m dx}{(dx)^n} = \int x^{m+1} \frac{dx}{x} (dx)^{-n}$ et intégrant par parties.

En continuant ainsi, on ramènera la fonction proposée $\int \frac{x^m dx}{(dx)^n}$ à dépendre d'une intégration de celle-ci

$$\int \frac{x^m dx}{dx}$$

qui n'est plus donnée par la formule, et qu'en effet on ne sait pas intégrer. — C'est ce point cependant qui nous ramène au cas d'impossibilité: car il est facile d'examiner cette intégrale à la forme

$$\int a^x \frac{dx}{x}$$

qui n'est possible tout-à-fait comme impossible à trouver.

Posons en effet

$$x^{m+1} = e^z$$

d'où

$$(m+1)x^m dx = e^z dz$$

et aussi

$$(m+1)dx = e^z$$

Divisons membre à membre

$$\frac{x^m dx}{dx} = \frac{e^z dz}{z}$$

Fonctions Circulaires.

Soit à intégrer

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x \, dx$$

Intégrons par parties.

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}$$

or

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}(1+x^2) + C$$

Donc

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x - \frac{1}{2} \mathcal{L}(1+x^2) + C$$

Soit proposer

$$\int (\operatorname{arc} \operatorname{Tg} x)^2 \, dx$$

L'intégration par parties donne

$$\int (\operatorname{arc} \operatorname{Tg} x)^2 \, dx = x (\operatorname{arc} \operatorname{Tg} x)^2 - \int x \cdot 2 \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x \frac{dx}{1+x^2}$$

d'où

$$2 \int \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x \frac{x \, dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{Tg} x \mathcal{L}(1+x^2) - \int \mathcal{L}(1+x^2) \frac{dx}{1+x^2}$$

ainsi le procédé ne réussit pas, car on arrive à une intégrale compliquée. on ne la simplifierait pas en posant $1+x^2 = u$.

Soit à intégrer

$$\int (\operatorname{arc} \sin x)^n \, dx$$

L'intégration par parties donne

$$\int (\operatorname{arc} \sin x)^n \, dx = x (\operatorname{arc} \sin x)^n - n \int (\operatorname{arc} \sin x)^{n-1} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on voit que

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

on peut donc encore intégrer par parties :

$$\int (\operatorname{arclsin} x)^{n-1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} (\operatorname{arclsin} x)^{n-1} + (n-1) \int (\operatorname{arclsin} x)^{n-2} dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

En substituant

$$\int (\operatorname{arclsin} x)^n dx = x (\operatorname{arclsin} x)^n - n \sqrt{1-x^2} (\operatorname{arclsin} x)^{n-1} - n(n-1) \int (\operatorname{arclsin} x)^{n-2} dx$$

Si n est pair, la question peut être regardée comme résolue.

Si n est impair, on sera ramené à intégrer $\operatorname{arclsin} x dx$. Or

$$\int \operatorname{arclsin} x dx = x \operatorname{arclsin} x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arclsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Soit encore

$$\int \operatorname{arclsin} x \cdot x^n dx$$

on a

$$\int \operatorname{arclsin} x \cdot x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arclsin} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

L'intégration est ramenée à celle de $\frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, que l'on sait opérer si n est entier.

Si l'intégration par parties fournit quelquefois entre des intégrales inconnues des eq. que l'on sait résoudre.

Soit par ex. à trouver les deux intégrales

$$\int e^{ax} \cos bx dx \quad \text{et} \quad \int e^{ax} \sin bx dx$$

on a

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{\cos bx \cdot e^{ax}}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{\sin bx \cdot e^{ax}}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx$$

Je multiplie la seconde équation par $\frac{b}{a}$, et j'ajoute à la 1^{re}. J'obtiens :

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

Je multiplie la 1^{re} par $-\frac{b}{a}$, et j'ajoute à la seconde; j'ai

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C'$$

Rem. - on arrive encore à ces formules au moyen du Imaginaires.

on a, en général:

$$\int e^{mx} \, dx = \frac{e^{mx}}{m} \quad \text{donc} \quad \int e^{(a+b\sqrt{-1})x} \, dx = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}}$$

$$\text{or } e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}, \quad \text{et } e^{bx\sqrt{-1}} = \cos bx + \sqrt{-1} \sin bx$$

En substituant, il vient

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})x} \, dx = e^{ax} \frac{\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx}{a+b\sqrt{-1}}$$

ou

$$\int e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx) \, dx = e^{ax} \frac{\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx}{a^2 + b^2} (a - b\sqrt{-1})$$

en affectant, et égalant entre elles les parties réelles et les parties Imaginaires, on retombe sur les formules précédentes.

Une fonction rationnelle et entière de Sinus et de Cosinus peut toujours s'intégrer après qu'on a changé par les formules connues les puissances de Sinus et Cosinus en Sinus et Cosinus d'un multiple, et les produits de Sinus et Cosinus en arcs différents en Sinus et Cosinus.

Soit par exemple à intégrer

$$\int \sin(mx+n) \cos(px+q) \, dx$$

on appliquera la formule

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

et l'on en déduit

$$\sin(mx+n) \cos(px+q) = \frac{1}{2} \sin[(m+p)x+n+q] - \frac{1}{2} \sin[(m-p)x+n-q]$$

Donc

$$\int \sin(mx+n) \cos(px+q) dx = -\frac{\cos[(m+p)x+n+q]}{2(m+p)} - \frac{\cos[(m-p)x+n-q]}{2(m-p)} + C$$

La fonction plus simple

$$\int \sin(mx+n) dx$$

s'intégrerait immédiatement :

$$\int \sin(mx+n) dx = -\frac{1}{m} \cos(mx+n) + C$$

Cherchons maintenant

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

on peut, par un changement de variable, revenir à une différentielle binôme. Posons $z = \sin x$, $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, $dz = \cos x dx = \sqrt{1-z^2} dx$

Il viendra

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int z^m (1-z^2)^{\frac{n}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz$$

si $\frac{n+1}{2}$ est entier, c.à.d. si n est impair, la fonction est intégrable quel que soit m . - si $\frac{n-1}{2}$ est entier, c.à.d. si n est impair, la fonction peut se développer en une suite infinie de monômes, et est intégrable quel que soit m . - si m et n sont pairs, la somme $\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2}$ ou $\frac{m+n}{2}$ est un entier, la fonction est encore intégrable. - ainsi, en résumé, elle l'est toutes les fois que m et n seront entiers.

on peut aussi appliquer l'intégration par parties.

Nous commencerons par les cas les plus simples.

1°. $n=0$. on a

$$\int \sin^m x dx$$

or on aura

$$\int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \, dx &= -\int \sin^{m-1} x \cos x \, dx + (m-1) \int \cos^2 x \sin^{m-2} x \, dx \\ &= -\int \sin^{m-1} x \cos x \, dx + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx - (m-1) \int \sin^m x \, dx \end{aligned}$$

D'où

$$\int \sin^m x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx$$

en appliquant de nouveau cette formule, on arrive à $\int dx$ ou bien à $\int \sin x \, dx$, suivant que m est pair ou impair. La question est donc résolue.

2°. Si l'on pose dans la formule précédente $x = \frac{\pi}{2} - x'$, et $m = n$, on aura (en supprimant l'accent de x')

$$\int \cos^n x \, (-dx) = -\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, (-dx)$$

ou bien.

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

3°. Pour passer au cas où m est négatif, nous reprendrons les formules précédentes pour rapporter à $\int \sin^{m-2} x \, dx$ ou $\int \cos^{m-2} x \, dx$; nous échangerons ensuite (pour le moins seulement) $m-2$ en $-m$, et nous aurons

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

En continuant, on arrive à $\int \frac{dx}{\sin x}$ si m est impair, et à $\int dx$ si m est pair. Or

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\sin \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \mathcal{L} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

4°. Si dans ces formules on remplace x par $\frac{\pi}{2} - x$, et m par n , on aura

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}$$

on aurait conduit finalement à intégrer $\frac{dx}{\cos x}$ or

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= - \int \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = - \int \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C = - \int \operatorname{Tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C \\ &= \int \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C = \int \operatorname{Tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Rem. I. La formule de Moivre donne encore un moyen d'intégrer $\sin^n x dx$ et $\cos^n x dx$: car elle donne le développement de ces fonctions suivant les puissances entières du sinus et du cosinus des arcs multiples. - Par ex. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ donc $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Rem. II. Le problème des oscillations du pendule conduit à une fonction dont on peut ramener l'intégration aux intégrales précédentes. Cette fonction est

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}$$

Prenons

$$\cos x = 1 - \beta \quad \cos \theta = 1 - \alpha$$

il s'ensuit

$$dx = \sin \theta d\theta = d\theta \sqrt{2x - \alpha^2}$$

Donc

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x - \alpha^2)} \sqrt{2(\beta - \alpha)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x(\beta - \alpha)(1 - \frac{\alpha}{\beta})}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx(1 - \frac{\alpha}{\beta})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\beta x - \alpha^2}}$$

on a vu dans le calcul différentiel que

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \dots$$

et ce développement est une série convergente toutes les fois que $-1 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou quand x varie de $-\alpha$ à $+\alpha$. or c'est ce qui arrive ici, puisque $x = 1 - \cos \theta$. - on développera donc la fraction proposée, et l'on intégrera chaque terme séparément. et le terme général du développement, abstraction faite du coefficient, est

$$\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Posons

$$x = \beta \sin^2 z$$

donc

$$dx = 2\beta \sin z \cos z dz$$

La racine carrée devient

$$\frac{2\beta^{n+1} \sin^{2n+1} z \cos z dz}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 z \cos^2 z}} = 2\beta^n \sin^{2n} z dz$$

ce qu'on peut intégrer.

5°. Revenons maintenant à l'intégration de la fonction

$$\sin^m x \cos^n x dx$$

Dans le cas général.

Cherchons d'abord à diminuer l'exposant de $\sin x$. — on remarque.

1° que

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^{m-1} x \sin x \cos^n x dx = -\sin^{m-1} x \cos^n x d(\cos x)$$

par suite

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x dx \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx - \frac{m-1}{n+1} \int \sin^m x \cos^n x dx \end{aligned}$$

et en résolvant

$$(1) \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx$$

en continuant, on ramènera l'exposant de $\sin x$ à être 0 ou 1.

Si maintenant on veut abaisser l'exposant de $\cos x$, il suffit de changer dans la formule précédente x en $\frac{\pi}{2} - x$, et m en n , on aura

$$\int \cos^n x \sin^m x d(-x) = -\frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^{n-2} x \sin^m x (-dx)$$

ou

$$(2) \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

et l'on pourra ainsi ramener l'expression de $\cos x$ à son val
ou égal à 1.

En Définitive, on aura donc à intégrer l'une des expressions

$$dx, \quad \sin x \, dx, \quad \cos x \, dx, \quad \sin x \cos x \, dx$$

ce qui est facile.

Enfin, si m ou n devenaient négatifs, soit séparément,
soit simultanément, on réduirait les formules (1) et (2) par
rapport aux seconds ~~me~~ intégrales, et l'on arriverait à des
formules de réduction appropriées à ces cas.

Il est évident qu'en combinant cette hypothèse avec la première,
on pourra alors être ramener à intégrer l'une des fonctions

$$\frac{dx}{\sin x} \quad \frac{dx}{\cos x} \quad \frac{\sin x \, dx}{\cos x} \quad \frac{\cos x \, dx}{\sin x} \quad \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

or les deux premières ont été trouvées (p. 510)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

Restent les trois dernières.

$$\text{or} \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \int \frac{d. \cos x}{\cos x} = - \int \frac{dx}{\cos x} + C$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d. \sin x}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d. x}{\sin x} = \int \operatorname{tg} x + C$$

ainsi le problème peut être considéré comme résolu en général.

Intégrales Définies.

Soit

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Supposons que cette Intégrale Soit nulle pour $x=a$.

Il faudra que l'on ait

$$F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

alors l'intégrale proposée devient

$$\int f(x) dx = F(x) - F(a)$$

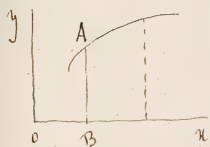
Cette forme n'est pas moins générale que la ^{1^{re}} la quantité a restant indéterminée. — Si on lui donne une valeur particulière, l'intégrale $\int f(x) dx$ ne représente plus alors que la différence entre la valeur que prend $F(x)$ pour $x=a$ et celle qu'elle acquiert pour tout autre valeur de la variable.

Supposons que l'on fasse $x=b$, l'intégrale sera $F(b) - F(a)$; on dit alors que l'intégrale commence à $x=a$, et qu'elle est prise de a à b : ce que l'on représente par la notation

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

qui est due à L. ouvrier. — Euler écrivait $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ ou $\int f(x) dx \Big|_{x=a}^{x=b}$.

Les deux valeurs $x=a$ et $x=b$ sont les Limites de l'Intégrale : l'Intégrale prise entre ces deux limites, ou bien la différence des valeurs qu'elle acquiert pour $x=a$ et $x=b$, est appelée Intégrale Définie.



Nous avons vu que si l'on connaît la courbe $y=f(x)$, l'aire de cette courbe n'est autre chose que l'Intégrale Indéfinie $\int f(x) dx = F(x) + C$. En effet, le calcul Différentiel nous a appris que l'aire comprise entre l'ordonnée fixe AB et une ordonnée y correspondante à une abscisse variable x a pour Différentielle $y dx$ ou $f(x) dx$. Quant à la constante C , sa valeur dépend de l'origine assignée au segment : si cette origine correspond à l'abscisse $x=a$, on a alors $C = -F(a)$. Que l'on suppose en outre le segment terminé à $x=b$, et l'on verra alors que l'Intégrale Définie prise de a à b , ou

$$F(b) - F(a)$$

n'est autre que le segment compris entre les deux ordonnées correspondantes à $x=b$ et $x=a$.

Par extension de la notation de Cauchy, si l'on voulait l'aire arbitraire la limite supérieure b , on écrirait

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$$

et alors, si a est indéterminé, on voit qu'une Intégrale Indéfinie pourra être remplacée, sans moins de généralité, par une Intégrale Définie.

Dans tout ce qui va suivre, nous considérerons $F(x)$ comme une fonction continue : car la notation exige que la fonction passe de a à b par des points insensibles. Cela n'est pas d'ailleurs $f(x)$ à être continu : car l'ordonnée d'une courbe peut passer brusquement d'une valeur à une autre sans que

pour cela il faut que l'on ait une fonction continue; pourvu toutefois que l'on ne devienne pas infini.

Ex. Quand on renverse les limites, l'intégrale change de signe.

c. ad.

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Nous supposons donc toujours dans la suite $a < b$.

Il résulte encore de la définition d'une intégrale définie que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^b f(x) dx$$

α, β, γ étant absolument quelconques, compris ou non entre a et b . — En effet :

$$F(b) - F(a) = F(\alpha) - F(a) + F(\beta) - F(\alpha) + F(\gamma) - F(\beta) + F(b) - F(\gamma)$$

Ex. Une intégrale définie peut être regardée comme la limite de la somme des éléments.

Supposons l'intervalle $b-a$ partagé en n parties $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
Nous appelons éléments de l'intégrale les quantités

$$F(a) \alpha, \quad F(a+\alpha_1) \alpha_2, \quad \dots, \quad F(a+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}) \alpha_n.$$

or on a par définition

$$F(a+\alpha_1) - F(a) = \alpha_1 \{ f(a) + \epsilon_1 \}$$

$$F(a+\alpha_1+\alpha_2) - F(a+\alpha_1) = \alpha_2 \{ f(a+\alpha_1) + \epsilon_2 \}$$

$$F(a+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}) - F(a+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-2}) = \alpha_{n-1} \{ f(a+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-2}) + \epsilon_{n-1} \}$$

$$F(a+\alpha_1+\dots+\alpha_n = b) - F(a+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}) = \alpha_n \{ f(a+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}) + \epsilon_n \}$$

ajoutant, on a

$$F(b) - F(a) = \Delta_1 f(a) + \Delta_2 f(a + \Delta_1) + \dots + \Delta_n f(a + \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1})$$

or Δ_1, Δ_2 , et infiniment petit par rapport à $\Delta_1 f(a)$; de même les autres.

Ainsi

$$F(b) - F(a) = \lim \{ \Delta_1 f(a) + \Delta_2 f(a + \Delta_1) + \dots + \Delta_n f(a + \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1}) \}$$

eq f. 11.

Cette propriété est susceptible d'une interprétation géométrique. Considérons une courbe ayant pour eq. $y = f(x)$. L'aire comprise entre les deux ordonnées correspondantes aux abscisses a et b représente l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$. - La proposition revient à dire que cette aire est la limite d'une somme de rectangles ayant pour base une partie de $b - a$ et pour hauteur une ordonnée.

Cela suppose que l'ordonnée ne passe pas pour infini dans l'intervalle de a à b .

Si l'ordonnée passait pour zéro, $f(x)$ de changerait de signe, et l'intégrale représenterait la différence des aires. Pour avoir leur somme arithmétique, il faudrait les calculer séparément? on devra faire bien attention à cela dans les applications géométriques.

Le chapitre précédent sert à trouver quelques propriétés de l'intégrale que l'on ne sait pas effectuer, mais sur lesquelles on a des données.

Soit $\int_a^b f(x) dx$ une intégrale que l'on ne sait pas trouver. Quel est son signe? on a un théorème

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

L'intégrale sera positive si $F(x)$ est croissant de $x = a$ à $x = b$,

Cad. si $f(x)$ est > 0 , elle sera négative dans le cas contraire.

Il est des cas où l'on peut prouver que l'intégrale est nulle. Soit

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^m \sin x \, dx$$

Supposons que x varie de $-\pi$ à $+\pi$; lorsque x passera de $-\pi$ à 0 , $\sin x$ prendra des valeurs égales et de signes contraires à celles qu'il aura lorsque x ira de 0 à $+\pi$: x^m reprendra les mêmes valeurs. ainsi les éléments se détruisent deux à deux, et l'intégrale est nulle.

En général, si $q(x)$ est une fonction paire, c. ad. telle que

$$q(-x) = q(x), \text{ on a } \int_{-\pi}^{\pi} q(x) \sin x \, dx = 0$$

De même, si $q(x)$ est une fonction impaire, $q(-x) = -q(x)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} q(x) \cos x \, dx = 0$$

on peut encore trouver des limites entre lesquelles est comprise une intégrale indéfinie, telle que $\int_a^b f(x) \, dx$. — Supposons que l'on ait toujours $f(x) < q(x)$, on

$$q(x) - f(x) > 0$$

on aura donc

$$\int_a^b [q(x) - f(x)] \, dx > 0$$

D'où

$$\int_a^b q(x) \, dx > \int_a^b f(x) \, dx$$

ainsi, $q(x)$ étant une fonction connue, on a une limite que l'intégrale ne peut dépasser.

Psi l'on a toujours $f(x) > \chi(x)$, on aura de même

$$\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b \chi(x) \, dx$$

C'est en effet ce que montre bien la géométrie.

Si en lieu de deux fonctions $q(x)$ et $\chi(x)$, on peut avoir

$$B < f(x) < A$$

on en déduira

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a) A$$

$$\int_a^b f(x) dx > (b-a) B$$

et par conséquent, si f est une fonction continue entre a et b ,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\theta)$$

M(A, B) désignant une certaine valeur intermédiaire entre A et B .

Si maintenant $f(x)$ est continue, on pourra écrire

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a + \theta(b-a))$$

(en supposant même que $f(x)$ va toujours en croissant de a à b ,
c'est évident par la géométrie; car alors $A = f(b)$ et $B = f(a)$)

Supposons par exemple qu'on ne sache pas intégrer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$$

et cherchons-en deux limites. Je suppose $m > 1$; on a $x < 1$.

Alors, $x^m < x$. Donc en remplaçant x^m par x , j'augmente le radical, et j'augmente la fraction. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

et on a $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}$, et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 - \sqrt{2}$. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} < 2 - \sqrt{2}$$

Pour trouver une limite inférieure, j'appliquerai quelque somme à une valeur intermédiaire particulière, $m = \frac{3}{2}$ par ex.
alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

or l'intégrale du second membre est arclsin $x + C$; et, entre les limites 0 et $\frac{1}{2}$, elle donne $\frac{\pi}{6}$. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} > \frac{\pi}{6}$$

on aurait en général

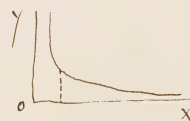
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} > \int_0^{\frac{1}{2}} dx > \frac{1}{2}$$

Mais nous supposons jusqu'ici que les limites a et b de l'intégrale soient finies. — Mais allons maintenant examiner ce que devient l'intégrale lorsque l'une des limites est infinie.
on appelle valeur de l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

ce que devient l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ quand b croît au-delà de toutes limites. — Il peut arriver que cette limite existe; mais cette intégrale sera souvent infinie, comme $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$. Car $\int_a^b \frac{dx}{x} = \mathcal{L} \frac{b}{a}$, et $\mathcal{L} \infty = \infty$. Cela montre que la courbe $y = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite, bien que l'ordonnée ait zéro pour limite.

Mais on comprend aussi que l'intégrale puisse avoir une



limité. Soit pour exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{(2x+1) dx}{x^2}$$

La fonction $\frac{2x+1}{x^2}$ peut s'écrire $\frac{1}{x^2} (2 + \frac{1}{x})$. x restant toujours
de 1 à ∞ , plus grand que 1, cette fonction est moindre que $\frac{3}{x^2}$.

Ainsi

$$\int_1^b \frac{(2x+1) dx}{x^2} < 3 \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

$$\text{or } \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \quad \text{et} \quad \int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b} \quad \text{Donc}$$

$$\int_1^b \frac{(2x+1) dx}{x^2} < 3 \left(1 + \frac{1}{b}\right)$$

Si b devient infini, on aura

$$\int_1^{\infty} \frac{(2x+1) dx}{x^2} < 3$$

Si donc on construit la courbe $y = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}$, à laquelle l'axe
des x est asymptote, l'aire comprise à partir de l'ordonnée
correspondante à $x=1$ est finie et moindre que 3.

En général, toutes les fois qu'il sera possible de reconnaître
que la fonction est moindre que $\frac{A}{x^n}$, $n > 1$, l'intégrale est
finie. — Cela se voit aisément. Car, si cela se vérifie à partir
de $x=h$: comme on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^h f(x) dx + \int_h^b f(x) dx$$

$$\text{et que } \int_h^b f(x) dx < A \int_h^b \frac{dx}{x^n} < \frac{A}{n-1} \left\{ \frac{1}{h^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right\}$$

$\frac{1}{b^{n-1}}$ disparaît pour b infini, donc

$$\int_a^{\infty} f(x) dx < \frac{A}{n-1} \left\{ \frac{1}{h^{n-1}} \right\}$$

Donc l'on conclut, \int_a^h étant fini, que \int_a^{∞} l'est aussi.

au contraire, quand on pourra reconnaître que $f(x) > \frac{A}{x^n}$
 $n \leq 1$, l'intégrale sera infinie. Car alors

$$\int_h^b f(x) dx > A \int_h^b \frac{dx}{x} > A \log \frac{b}{h}$$

qui devient infini pour $b = \infty$.

Soit l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$, et supposons que $f(x)$
 devienne infini pour $x = b$, ce qui arrivera pour exemple toutes
 les fois que $f(x)$ sera de la forme $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^n}$. Il semble qu'alors
 l'intégrale n'a plus de signification, et la géométrie n'explique
 rien : car la courbe $y = f(x)$ a dans ce cas une asymptote vertical-
 le à l'axe des y . — on convient d'appeler l'intégrale de a à b
 la limite vers laquelle converge $\int_a^{b-\alpha} f(x) dx$

quand α , quantité positive, très-petite, converge vers zéro.

Dans quel cas l'intégrale aura-t-elle des limites finies ? Dans
 quel cas sera-t-elle infinie ? — Puisque $f(x)$ devient infini
 pour $x = b$, on peut, comme j'en ai déjà dit, poser

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^n}$$

$\varphi(x)$ restant fini et non nul, et, selon que n est < 1 ou
 ≥ 1 , l'intégrale de a à b est finie, ou n'a pas de limite.

En effet, soit h une quantité comprise entre a et b , et aussi
 près de b qu'on voudra. on aura

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^h f(x) dx + \int_h^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

on peut admettre que h n'est pas une voisine de b pour que
 $\varphi(x)$ reste fini pour toute valeur de x comprise entre h et b ;

Il est donc possible de trouver une valeur finie m de $q(x)$ moindre que toutes les autres, et une M plus grande que toutes. Soit d'abord $n < 1$. Nous aurons

$$f(x) < \frac{M}{(b-x)^n}$$

pour tout

$$\int_h^{b-\varepsilon} f(x) dx < \int_h^{b-\varepsilon} \frac{M dx}{(b-x)^n} \quad \text{ou par } \frac{M}{1-n} \left\{ (b-h)^{1-n} - \varepsilon^{1-n} \right\}$$

ε^{1-n} tend vers zéro avec ε , et par conséquent, $\int_h^{b-\varepsilon} \frac{M dx}{(b-x)^n}$ tend vers $\frac{M}{1-n} (b-h)^{1-n}$, limite finie. Donc, pour $n < 1$, l'intégrale propre a une limite finie.

Si $n \geq 1$, elle est infinie. — En effet, prenons la plus petite m de valeurs de $q(x)$: on a

$$f(x) > \frac{m}{(b-x)^n}$$

$$\int_h^{b-\varepsilon} f(x) dx > m \int_h^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$> \frac{m}{n-1} \left\{ \frac{1}{(b-h)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \right\}$$

n étant plus grand que 1, le 2^d. membre augmente indéfiniment.

Enfin, si $n = 1$, on trouve

$$\int_h^{b-\varepsilon} f(x) dx > m \int_h^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x}$$

quantité qui devient encore infinie.

Les résultats seraient les mêmes si $f(x)$ devenait infini pour $x = a$.

Soit par exemple

$$\int_0^b \frac{\sin a dx}{x^{n+1}}$$

La fonction $\frac{\sin x}{x^{n+1}}$ devient infinie pour $x=0$: car on peut
 prendre $\frac{1}{x^n} \frac{\sin x}{x}$. — Si d'abord $n < 1$:

$$\int_{\varepsilon}^b \frac{\sin x \, dx}{x^{n+1}} < \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x^n} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{1-n} \left\{ b^{1-n} - \varepsilon^{1-n} \right\}$$

l'intégrale est finie. — Si $n > 1$, posons $\frac{\sin b}{b} = m$,
 nous aurons

$$\int_{\varepsilon}^b \frac{\sin x \, dx}{x^{n+1}} > \int_{\varepsilon}^b \frac{m \, dx}{x} \quad \text{ou que} \quad m \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x}$$

quantité qui augmente indéfiniment.

Soit $\int_a^b f(x) \, dx$, $f(b)$ étant infini : nous avons défini cette
 intégrale la limite de $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx$ quand ε tend vers zéro.
 or, dans le cas de $n < 1$, si l'on prend au lieu de cette limite
 celle de

$$\int_a^{b-\mu\varepsilon} f(x) \, dx$$

on trouve la même valeur pour l'intégrale. Cela tient à ce que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{b-\varepsilon}^{b-\mu\varepsilon} f(x) \, dx = 0$$

En effet, $f(x)$ peut s'écrire $\frac{(x-b)f(x)}{x-b}$. Donc

$$\int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) \, dx = \int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} (x-b) f(x) \frac{dx}{x-b}$$

Soit ξ une valeur moyenne entre $b-\varepsilon$ et $b-\mu\varepsilon$. L'intégrale
 peut s'écrire

$$(\xi-b) f(\xi) \int_{b-\mu\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{x-b}$$

Mais

$$\int \frac{dx}{x-b} = \mathcal{L}(x-b) \quad \text{et} \quad \int_{b-\mu\epsilon}^{b-\epsilon} \frac{dx}{x-b} = \mathcal{L}\mu$$

Donc

$$\int_{b-\mu\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) dx = (\xi-b) f(\xi) \mathcal{L}\mu \quad (a)$$

or, quand ϵ tend vers zéro, ξ se rapproche de la limite b , et se confond avec elle, $f(\xi)$ devient infini. Nous avons donc pour second membre le produit

$$\infty \times \infty = \mathcal{L}\mu$$

Mais nous avons admis que $f(x)$ ait la forme

$$\frac{\varphi(x)}{(b-x)^n} \quad n < 1$$

lors donc que l'on pose $x = \xi$, il restera

$$(\xi-b)^{1-n} \varphi(\xi)$$

quantité nulle pour $\xi=b$. ainsi l'intégrale

$$\int_{b-\mu\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) dx$$

est nulle à la limite.

Mais si $n \geq 1$, il n'est plus permis d'établir l'égalité à la limite de $\int_a^{b-\epsilon}$ celle de $\int_a^{b-\mu\epsilon}$. car alors

$$\int_{b-\mu\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) dx \neq 0$$

La considération de l'inégalité (a) fait voir que, dans le cas de $n=1$, cette intégrale se réduit à $k \mathcal{L}\mu$, k étant une constante, et que, pour $n > 1$, cette même intégrale croît au delà de toutes

limites.

M. - Cauchy a désigné ces intégrales par le nom d'Intégrales Singulières. — En général, $f(x)$ restant fini, l'intégrale

$$\int_{b-\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) dx$$

est nulle à la limite : car elle n'est composée que d'un seul élément. Mais cette intégrale n'est pas nulle dans tous les cas, et devient Intégrale Singulière quand $f(x)$ devient infini pour une des limites.

Soient a, c, b trois quantités rangées par ordre de grandeur croissante, et supposons que $f(c) = \infty$. on appelle Valeur principale de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ la limite, si elle existe, de

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx$$

Une telle intégrale se compose de la somme de deux intégrales semblables à celles qui ont été traitées plus haut : elle aura donc une valeur finie dans le cas où, $f(x)$ étant de la forme $\frac{\varphi(x)}{(c-x)^n}$, n sera < 1 , et infini pour $n \geq 1$.

Soit par exemple

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$$

la fonction $\frac{1}{x}$ devient infinie pour $x=0$. donc

$$\int_{-a}^b \frac{dx}{x} = \lim \left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\epsilon}^b \frac{dx}{x} \right]$$

La seconde Intégrale \mathcal{Q} a 2^e membre a pour valeur
 $\mathcal{L}b - \mathcal{L}a$

Quant à la 1^{re}, on peut, pour éviter les logarithmes Impropres, prendre, $x = -x$, et par suite

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+\varepsilon} \frac{dx}{x} = \mathcal{L}\varepsilon - \mathcal{L}a$$

ajoutant ces deux Intégrales

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \mathcal{L}b - \mathcal{L}a = \mathcal{L} \frac{b}{a}$$

quantité finie.

M^r. Cauchy a fait remarquer qu'il y a lieu de considérer la valeur générale de cette Intégrale, savoir

$$\lim \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right\}$$

Cette limite peut en effet, lorsque les deux parties sont infinies, différer de la 1^{re} limite: elle vaut en de plus deux Intégrales définies singulières

$$\int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{c+\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x) dx$$

qui ne sont pas nécessairement nulle: — on peut le vérifier sur l'exemple précédent.

Calcul par approximation

Des
Intégrales Définies.

Ce calcul repose sur le théorème qu'une Intégrale Définie est égale à la Somme de ses éléments. Car il en résulte qu'on peut prendre pour valeurs approchées de l'intégrale $\int f(x) dx$, ce qui serait rigoureusement vrai si Δx était infiniment petit. Cette approximation revient à prendre y au lieu de y elle-même, la somme des rectangles construits sur les ordonnées élevées à des distances Δx d'une d'entre elles, et menant par l'extrémité de chaque d'elles une parallèle aux x jusqu'à l'intersection de la suivante.

on aura une autre valeur approchée de l'Intégrale en prenant la somme des rectangles latéraux. Si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ les divisions faites sur l'axe des x entre les abscisses extrêmes a et b , cette somme aura pour expression

$$f(a+\alpha_1)\alpha_1 + f(a+\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2 + \dots + f(a+\alpha_1+\dots+\alpha_n)\alpha_n$$

La dernière terme est $f(b)\alpha_n$.

Enfin on aura une approximation plus grande en prenant la somme des trapèzes construits en joignant les extrémités des ordonnées successives. Elle aura évidemment pour expression

$$\frac{\alpha_1}{2} \{ f(a) + f(a+\alpha_1) \} + \frac{\alpha_2}{2} \{ f(a+\alpha_1) + f(a+\alpha_1+\alpha_2) \} + \dots$$

Les divisions $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sont en général quelconques. Si nous les supposons maintenant égales entre elles, de sorte que, h étant

Il me semble, on ait $nh = b - a$, la somme des trapèzes deviendra

$$h \left\{ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + \frac{f(b)}{2} \right\}$$

cette approximation sera d'autant plus grande que h sera moindre. — Il y a pourtant un inconvénient à prendre h trop petit : car le nombre des termes de la parentèse augmente avec $1/h$, et en même temps s'accroît la difficulté du calcul.

On doit à Euler une formule qui permet de corriger celle que nous venons d'obtenir, pourvu que h ne soit pas trop petit.

En désignant par $F(x)$ l'intégrale de $f(x) dx$, nous aurons par la formule de Taylor

$$F(a+h) - F(a) = h f(a) + \frac{h^2}{1.2} f'(a) + \dots$$

$$F(a+2h) - F(a+h) = h f(a+h) + \frac{h^2}{1.2} f'(a+h) + \dots$$

$$\dots$$

$$F(b) - F(a + \frac{b-a}{n-1}h) = h f(a + \frac{b-a}{n-1}h) + \frac{h^2}{1.2} f'(a + \frac{b-a}{n-1}h) + \dots$$

Si nous faisons la somme de toutes ces égalités, le 1^{er} membre se réduit à $F(b) - F(a)$, c. ad. à $\int_a^b f(x) dx$, et si nous abrégons nous obtenons dans le second

$$S = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a + \frac{b-a}{n-1}h)$$

$$S' = f'(a) + f'(a+h) + f'(a+2h) + \dots + f'(a + \frac{b-a}{n-1}h)$$

Mais nous

$$\int_a^b f(x) dx = h S + \frac{h^2}{1.2} S' + \frac{h^3}{1.2.3} S'' + \dots \quad (1)$$

à mesure que h sera plus petit, le calcul des sommes S, S', S'' sera de plus en plus difficile. Il faut donc les remplacer

par des termes équivalents d'un calcul plus aisé.

Si nous répétons sur $f(x)$ les mêmes calculs que sur $F'(x)$,
nous aurons

$$f(b) - f(a) = h S' + \frac{h^2}{1.2} S'' + \frac{h^3}{1.2.3} S''' + \dots \quad (2)$$

De même

$$f'(b) - f'(a) = h S'' + \frac{h^2}{1.2} S''' + \frac{h^3}{1.2.3} S^{(4)} + \dots \quad (3)$$

$$f''(b) - f''(a) = h S''' + \frac{h^2}{1.2} S^{(4)} + \frac{h^3}{1.2.3} S^{(5)} + \dots \quad (4)$$

Maintenant, je fais la somme des égalités (1), (2), (3), (4)..
après avoir multiplié la seconde par λh , la 3^e par $\lambda^2 h^2$,
la 4^e par $\lambda^3 h^3$, .. et j'obtiens

$$\int_a^b f(x) dx + \lambda h \{f(b) - f(a)\} + \lambda^2 h^2 \{f'(b) - f'(a)\} + \lambda^3 h^3 \{f''(b) - f''(a)\} + \dots = h S + h^2 S' \left(\frac{1}{1.2} + \lambda \right) + h^3 S'' \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{\lambda}{1.2} + \lambda^2 \right) + \dots$$

Dans cette formule, on négligera toutes les puissances de h
qui dépassent la 4^e. par exemple: puis on disposera des indéter-
minées $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$.. de manière à faire évanouir toutes les puissances
qui y figurent encore, hors la 1^{re}. Nous posons donc

$$(A) \quad \frac{1}{1.2} + \lambda = 0 \quad \left| \quad \frac{1}{1.2.3} + \frac{\lambda}{1.2} + \lambda^2 = 0 \quad \right| \quad \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{\lambda}{1.2.3} + \frac{\lambda^2}{1.2} + \lambda^3 = 0$$

D'où l'on déduit

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad \lambda^2 = \frac{1}{12} \quad \lambda^3 = 0$$

Substituant, et isolant l'intégrale cherchée, on a

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2} \right] - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)]$$

Le 1^{er} terme de cette Σ valeur est précisément la somme des trapèzes
que nous avons déjà trouvés plus haut. - Le terme de correction
est d'ailleurs très-simple, puisqu'il n'est composé que d'un binôme
faible à calculer. - L'approximation est d'ailleurs très-grande,

puisque, λ'' étant nul, le terme suivant en h^2 disparaît.

Pour trouver les quantités $\lambda, \lambda', \lambda''$... nous avons résolu les équations (A). Mais cette résolution serait très-pénible si l'on voulait pousser plus loin l'approximation: et d'ailleurs elle ne met pas en lumière la loi de formation de ces indéterminées, lesquelles sont indépendantes de la forme particulière de la fonction. Parmi les fonctions propres à leur détermination, on a pris l'exponentielle, qui se reproduit indéfiniment par les différentielles prises successives. - on pose donc

$$\int_a^b f(x) dx = e^b - e^a \quad f(x) = e^x$$

Pour ces particularités, nous avons

$$S = e^a (1 + e^h + e^{2h} + \dots + e^{(n-1)h}) = \frac{e^a (e^{eh} - 1)}{e^h - 1} = \frac{e^b - e^a}{e^h - 1}$$

on aurait la même valeur pour S', S'' ... etc. Substituant dans la formule trouvée tout-à-l'heure, et nous rappelant que dans les termes du 2^e membre, à l'exception du 1^{er}, doivent avoir leurs coefficients nuls, nous aurons

$$(e^b - e^a) [1 + \lambda h + \lambda' h^2 + \dots + \lambda^{n-1} h^n] = h \frac{e^b - e^a}{e^h - 1}$$

signifiant

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + \lambda h + \lambda' h^2 + \dots + \lambda^{n-1} h^n$$

le 1^{er} membre est indépendant de indéterminées $\lambda, \lambda', \lambda''$... on le développe suivant les puissances de h , et d'un côté on le développe avec le second membre, on aura des équations dont chacune ne contiendra qu'une inconnue, de sorte que ces inconnues seront ainsi déterminées. - Si nous prenons la valeur connue de λ , $\lambda = -\frac{1}{2}$, en faisant

posons λh dans le 1^{er} membre, il deviendra

$$\frac{h}{e^h - 1} + \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{e^h - 1} \right\} = \frac{h}{2} \frac{e^h + 1}{e^h - 1} = \frac{h}{2} \frac{e^{\frac{h}{2}} + e^{-\frac{h}{2}}}{e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}}$$

Ce terme ne change pas quand on remplace h par $-h$, et réciproquement. Le développement ne doit donc contenir que des puissances paires de h ; les coefficients $\lambda'', \lambda''', \dots$ doivent être nuls: ce que nous aurons déjà observé pour λ'' .

Intégration

par le développement en Série.

Th. La série a_1, a_2, \dots, a_n de termes deux fonctions
 de x est convergente pour toute valeur de x comprise entre
 a et b , la série des intégrales des différents termes multipliés
 chacun par dx , est convergente, et aura pour somme l'inté-
 grale de la série proposée.

Soit

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + f_n$$

et

$$S dx = a_1 dx + a_2 dx + a_3 dx + \dots + a_n dx + f_n dx$$

En intégrant

$$\int_a^x S dx = \int_a^x a_1 dx + \int_a^x a_2 dx + \dots + \int_a^x a_n dx + \int_a^x f_n dx$$

Soit M_n la plus grande valeur de f_n lorsque x varie de a à x .

$$\int_a^x f_n dx < M_n \int_a^x dx < M_n (x-a)$$

Il suit de là, M_n pouvant être rendu moindre que toute
 quantité donnée puisque la série est convergente, que le terme
 complémentaire de la série des intégrales peut devenir lui-même
 aussi petit qu'on voudra. Cette dernière série
 est donc aussi convergente, et elle a pour somme $\int_a^x S dx$
 c. q. f. d.

Supposons que la série proposée soit convergente pour $x=a$,
 et pour toute valeur de x comprise entre a et b , mais ne le
 soit plus pour $x=b$: on n'en aura pas moins

$$\int_a^b S dx = \int_a^b a_1 dx + \int_a^b a_2 dx + \dots$$

hantes les fois que la série représentée par le second membre sera convergente. — La série

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x}$$

est un exemple de ce cas. En effet, elle est convergente pour $x < 1$, divergente pour $x = 1$, tandis que la série des intégrales

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

est encore convergente pour $x = 1$ et représente encore $\int \frac{dx}{1+x}$ ou $\log(1+x)$ pour $x = 1$, c.à.d. $\log 2$.

Pour démontrer cette proposition, j'observe que, quelque petit que soit ε , on a toujours

$$\int_a^{b-\varepsilon} S dx = \int_a^{b-\varepsilon} a_1 dx + \int_a^{b-\varepsilon} a_2 dx + \dots$$

et les deux membres ayant constamment les mêmes valeurs à mesure que ε décroît, sont encore égaux à la limite hors que ε est nul c.à.d.

De ce que la série des intégrales est convergente, on ne peut pas évidemment en conclure qu'il en est de même de la série des séries. — ainsi la série ci-dessus le prouve. — Supposons encore que le terme complémentaire de la série des intégrales soit $\frac{S_n x^n}{n}$: celle de la même série serait $\log x$, qui ne diverge pas indéfiniment lorsque n augmente.

Nous montrons maintenant comment cette théorie pourra nous mener à une valeur approchée d'une intégrale donnée $\int_a^b f(x) dx$.

à développer $f(x)$ par la série de Taylor. Nous aurons

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$$

Multiplications par dx et intégrons :

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x) dx &= (x-a)f(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f'(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n)}(a) + \frac{1}{1.2 \dots (n+1)} \int_a^x f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) \cdot (x-a)^{n+1} dx \end{aligned}$$

on peut trouver deux limites de l'erreur au moyen de la dernière intégrale. Soit M plus grand que la plus grande valeur que prend $f^{(n+1)}(x)$ entre $x=a$ et $x=x$: l'erreur sera moindre que

$$\frac{M}{1.2.3 \dots (n+1)} \frac{(x-a)^{n+2}}{n+2}$$

ou encore de même pour minimum de l'erreur

$$\frac{m}{1.2.3 \dots (n+1)} \frac{(x-a)^{n+2}}{n+2}$$

Si, dans la formule précédente, on fait $a=0$, on aura une application de la série de MacLaurin. Cette nouvelle formule, il est vrai, sera moins générale et plus sujette à l'omission en défaut que la première.

L'intégration par parties peut conduire à la formule de Taylor, d'y a obtenu par d'autres considérations.

Nous avons en effet

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(x) dx$$

Simplifions les limites en posant $x' = x+h-x$: faire $x' = x$ reviendra à faire $h=x$, égaler x' à $x+h$ reviendra à faire $x=0$. D'ailleurs on aura $dx = -dx'$. Nous aurons donc

$$\int_x^{x+h} f'(u) du = - \int_h^0 f'(x+h-z) dz = \int_0^h f'(x+h-z) dz$$

Ainsi le procédé d'intégration par parties nous donnera, d'abord pour l'intégrale indéfinie,

$$\int f'(x+h-z) dz = z f'(x+h-z) + \int f''(x+h-z) z dz$$

$$\int f''(x+h-z) z dz = \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{1}{1.2} \int z^2 f'''(x+h-z) dz$$

$$\frac{1}{1.2} \int f'''(x+h-z) z^2 dz = \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z) + \frac{1}{1.2.3} \int z^3 f^{(4)}(x+h-z) dz$$

et ainsi de suite, de sorte que, en faisant la somme de ces égalités, nous aurons

$$\begin{aligned} \int f'(x+h-z) dz &= z f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z) + \dots \\ &\quad + \frac{z^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x+h-z) + \frac{1}{1.2 \dots (n+1)} \int z^n f^{(n+1)}(x+h-z) dz \end{aligned}$$

Maintenant, pour avoir l'intégrale indéfinie entre les limites 0 et h , il faut faire successivement $z=0$ et $z=h$, et retrancher le 2^e. résultat du 1^{er}. Nous obtenons ainsi

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{1}{1.2 \dots n} \int_0^h z^n f^{(n+1)}(x+h-z) dz$$

Nous retombrons ainsi sur la formule de Taylor, au dernier terme près qui se trouve ici être une intégrale. Mais il est facile de le ramener à la forme ordinaire. Soient M et m la plus grande et la plus petite valeur de $f^{(n+1)}(x+h-z)$. on a alors

$$\frac{m h^{n+1}}{n+1} < \int_0^h f^{(n+1)}(x+h-z) z^n dz < \frac{M h^{n+1}}{n+1}$$

par suite, si $f^{(n+1)}$ est continu, le terme complètement résidu sera

$$\frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

L'Intégration par parties conduit encore à une série connue sous le nom de Série de J. Bernoulli. - En effet

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx$$

$$\int x f'(x) dx = \frac{x^2}{1,2} f'(x) - \frac{1}{1,2} \int x^2 f''(x) dx$$

$$\frac{1}{1,2} \int x^2 f''(x) dx = \frac{x^3}{1,2,3} f''(x) - \frac{1}{1,2,3} \int x^3 f'''(x) dx$$

...

$$\frac{1}{1,2,\dots,(n-1)} \int x^{n-1} f^{(n-1)}(x) dx = \frac{x^n}{1,2,\dots,n} f^{(n-1)}(x) - \frac{1}{1,2,\dots,n} \int x^n f^{(n)}(x) dx$$

écrivons les signes du deux membres de l'eq. d'ordre n puis, et ajoutons :

$$\int f(x) dx = x f(x) - \frac{x^2}{1,2} f'(x) + \frac{x^3}{1,2,3} f''(x) - \dots \pm \frac{x^n}{1,2,\dots,n} f^{(n-1)}(x) \mp \frac{1}{1,2,\dots,n} \int x^n f^{(n)}(x) dx$$

Prenons maintenant l'intégrale entre 0 et x ; nous aurons

$$\int_0^x f(x) dx = x f(x) - \frac{x^2}{1,2} f'(x) + \frac{x^3}{1,2,3} f''(x) - \dots \pm \frac{1}{1,2,\dots,n} f^{(n-1)}(x) \mp \frac{1}{1,2,\dots,n} \int_0^x x^n f^{(n)}(x) dx$$

L'intégrale complètement connue d'ailleurs prendra la forme

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n)}(0)$$

La série de Bernoulli fournit un moyen de plus pour le développement des fonctions entières. En effet, j'écris que leur série développée $f(x)$. on posera

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx + C$$

ce qui est permis en posant $C = f(0)$: car $\int_0^x f'(x) dx = f(x) - f(0)$.
et la série de Bernoulli nous donne précisément le développement.
Or cette intégrale.

Cette même transformation sera utile encore toutes les fois que nous ne pourrions pas développer la fonction elle-même, tandis

que la Dérivée est d'un Développement facile. - Soit proposé de développer $L(1+x)$. La Dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x}$, et par la Division nous obtenons immédiatement

$$(a) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}$$

et $L(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$, et je n'ajoute pas de constante, car pour

$x=0$, $L(1+x)$ est nul. Donc

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^n dx}{1+x}$$

La série (a) est convergente quand x est compris entre 0 et 1; il en est donc de même de la Série des Intégrales; D'où il est permis d'écrire

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots$$

x étant compris entre 0 et 1, $\frac{x^n}{1+x}$ est $< x^n$. Donc

$$\int_0^x \frac{x^n dx}{1+x} < \int_0^x x^n dx < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

telle est la limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on s'arrête au terme de rang n . On voit qu'elle est une fraction du terme suivant. D'ailleurs elle est positive ou > 0 ; on en a donc aussi une limite inférieure.

Cette méthode s'emploie avec succès toutes les fois que la Dérivée sera d'une forme plus simple que la fonction elle-même. Soit par exemple $\text{arc} \lg x$; sa Dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$, et

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \pm x^{2n}$$

et l'intégration donne

$$\text{arc} \lg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

Ci forme complémentaire et celui que donne le développement de $\frac{1}{1-x^2}$ par simple division; comme il est moindre que $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, cette quantité est une limite supérieure de l'erreur.

Nous pourrions de même développer $\arcsin x$, dont la dérivée est

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La formule du binôme nous donne

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \frac{x^{2n+2}}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}$$

série convergente tant que $x < 1$. En multipliant chaque terme par dx et intégrant, on a

$$\arcsin x = x + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \frac{x^{2n+2}}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}$$

Si nous voulons trouver une limite de terme complémentaire, nous observerons que x variant de 0 à x , et 0 étant < 1 , le dénominateur sera le plus petit possible quand $\theta = 1$ et $x = x$, alors

$$\text{erreur} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+3}$$

Si, dans la formule de $\arcsin x$, nous faisons $x = \frac{1}{2}$, l'arc corrigé donnera $\frac{\pi}{6}$. Donc

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

sa valeur sera convergente.

applications Géométriques.

Quadrature et Rectification Des Courbes.

Nous avons déjà expliqué comment l'espace compris entre deux ordonnées d'une courbe, cette courbe et l'axe des x , est représenté par

$$\int_a^b y \, dx.$$

Il peut arriver que $\int_a^b x \, dy$ soit d'une intégration plus facile que $\int_a^b y \, dx$. on pourra alors employer la 1^{re} Intégrale: la seconde s'en déduira facilement.

L'intégration par parties donne

$$\int y \, dx = xy - \int x \, dy$$

Supposons $\int y \, dx = F(x) + C$ et $\int x \, dy = \varphi(y) + C$. l'égalité précédente s'écrira

$$F(x) = xy - \varphi(y) + C$$

Si nous avons à intégrer entre les limites a et b , nous devons faire successivement dans cette équation $x=a$ et $y=p$, $x=b$ et $y=q$, et retrancher le 1^{er} résultat du second. Nous trouvons ainsi

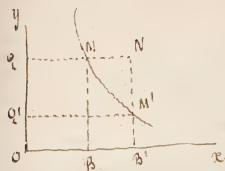
$$F(b) - F(a) = bq - ap - [\varphi(q) - \varphi(p)]$$

ce qu'on peut écrire

$$\int_a^b y \, dx = (xy)_a^b - \int_p^q x \, dy$$

Ceci est susceptible d'une interprétation Géométrique qui se fera mieux comprendre.

En effet :



$$\int_a^b y dx \text{ représente le rectangle } BN, \text{ moins } MM'N$$

$$- \int_p^q x dy \quad " \quad " \quad Q'N, \text{ moins } MM'N$$

Donc

$$\int_a^b y dx = BN - Q'N - \int_p^q x dy$$

or $BN = (b-a)p$ $Q'N = (p-q)b$ $BN - Q'N = bq - ap$. Et l'on voit
 immédiatement $(xy)_a^b$: ce qui démontre la formule, en même temps
 que l'on en déduit nettement la simplification.

Quadrature de Quelques Courbes particulières.

1°. Courbes Paraboliques.

$$y^m = px^n$$

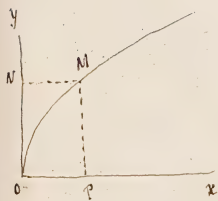
m et n étant supposés entiers et positifs.
 on en déduit

$$y = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}}$$

$$y dx = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx$$

et par suite

$$\int y dx = \frac{m p^{\frac{1}{m}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}} + C$$



Si l'on veut que l'intégration commence en 0, il faut prendre l'intégrale
 entre les limites 0 et x . Pour $x=0$, l'intégrale est nulle, donc $C=0$,
 et l'on obtient

$$\int_0^x y dx = \frac{m p^{\frac{1}{m}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}} = \frac{m}{m+n} xy$$

Cette expression de l'aire on se fait voir que si l'on construit le
 rectangle $ONMP$, les deux aires de ce rectangle et de la courbe

seront dans un rapport constant. Dans la parabole ordinaire, où $m=2$, $n=1$, on voit que l'aire de la courbe est le tiers de celle du rectangle.

Supposons deux paraboles ordinaires égales, l'une $y^2 = 2px$, l'autre $x^2 = 2py$. Il est facile de voir que la famille omn est le tiers du rectangle $obnq$. Si l'on a l'expression de la surface est facile à trouver. — Les coordonnées de M sont

$$x = 2p \quad y = 2p$$

L'aire du rectangle a pour surface $4p^2$, par suite l'aire de la famille est $\frac{4}{3} p^2$.

Cette aire peut aussi se trouver directement en la considérant comme la limite de la somme des rectangles élémentaires construits sur la différence des ordonnées des deux courbes. Nous aurons en effet, ainsi :

$$\text{aire } omnM = \int_0^x (y - y') dx$$

formule générale de la différence des aires de deux courbes quelconques.

Rem. — Nous venons de prouver que l'aire des courbes paraboli-ques est de la forme kxy . on peut démontrer que ces courbes sont les seules dont l'aire est en un rapport constant avec le rectangle construit sur les ordonnées limites. — Soit en effet

$$u = kxy$$

Donc

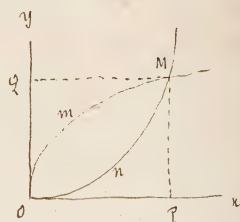
$$du = kx dy + ky dx$$

mais $du = y dx$

$$y dx = kx dy + ky dx$$

$$(k-1)y dx = -kx dy$$

$$(k-1) \frac{dx}{x} = -k \frac{dy}{y}$$



En intégrant

$$(k-1) \int x = -k \int y + \int p$$

$$\int (x^{k-1}) = - \int \left(\frac{y^k}{p} \right)$$

et si nous supposons $k=1$,

$$\int (x^{1-k}) = \int \frac{y^k}{p}$$

$$y^k = p x^{1-k}$$

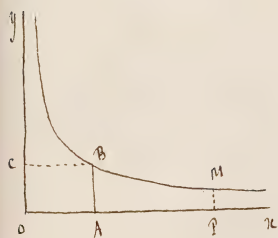
§ 9. Des courbes paraboliques.

2°. Courbes hyperboliques:

$$x^m y^n = p$$

$$\int_a^x y dx = \int_a^x p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n p^{\frac{1}{n}}}{n-m} \left(x^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}} \right)$$

Il faut discuter suivant que $n > m$, $n = m$, $n < m$.



Premier cas. — $n > m$. — L'axe asymptotique ABM est en même temps que x , et tend à l'infini avec lui. au contraire, l'axe compris entre l'axe des y , la courbe, et l'ordonnée AB , une que l'on obtient en faisant x fixe, et faisant converger a vers zéro, tend vers une limite finie

$$S = \frac{n p^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} xy$$

et x et y étant les coordonnées fixes OA et OB . on voit donc que l'axe asymptotique $OABy$ est dans un rapport constant avec le rectangle $OACB$.

Deuxième cas. — $n = m$. Dans ce cas, la formule générale se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. C'est qu'alors en effet l'intégration n'est plus possible comme nous l'avons exécutée; alors

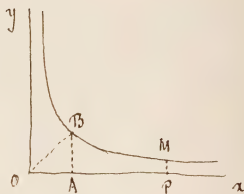
l'eq. de la courbe est celle de l'hyperbole Equilatère

$$xy = p \quad y = p \frac{1}{x}$$

$$p^{\frac{1}{n}} \int_a^x \frac{dx}{x} = p^{\frac{1}{n}} (Lx - La)$$

Supposons $p=1$, et prenons pour limite inférieure à l'abscisse de $x=1$, à laquelle correspond $y=1$, par conséquent l'abscisse de l'ordonnée B. Mais aurons

$$\text{aire } ABMP = L. OP$$



Dans ce cas, les ordonnées croissent en progression géométrique. — que, les abscisses croissent en progression arithmétique. — C'est à cause de cette propriété de représenter les aires d'une hyperbole que les logarithmes Népériens sont nommés parfois logarithmes Hyperboliques. — Il est aisé de comprendre le vice de cette dénomination, duquel on obtient que les logarithmes d'un système quelconque peuvent toujours représenter l'aire d'une hyperbole, et même d'une infinité d'hyperboles. Car :

Soit $xy = p$ l'eq. de l'hyperbole rapportée à des axes obliques sous l'angle θ : l'aire hyperbolique terminée d'une part à l'abscisse $x=1$ et de l'autre à $x=x$, sera

$$p \sin \theta Lx$$

et nous voulons avoir

$$p \sin \theta Lx = \log x$$

Si M est le module :

$$p \sin \theta = \frac{\log x}{Lx} = M$$

$$\sin \theta = \frac{M}{p}$$

Il s'ensuit donc, pour avoir une hyperbole satisfaisant à la condition voulue, de prendre $p > M$. Dans le système vulgaire, on a

$M = 0,4342948...$ on pourra prendre par conséquent $p=1$
 et $\sin \theta = M : c. ad.$ que les asymptotes de l'hyperbole $xy=1$
 dont les axes représentent les logarithmes vulgaires font entre elles
 un angle dont le sinus est $0,4342948...$ ou environ $26^\circ 24'$.
 Si l'on prenait $p=M$, on aurait $\theta=90^\circ$ l'hyperbole serait
 Equilatrice.

Troisième cas. - $n < m$. - Nous obtiendrons dans ce cas
 des résultats précisément inverses de ceux que nous a fournis
 la première hypothèse $n > m$. L'une asymptote qui comprise
 entre la courbe et l'axe des x sera finie, et celle comprise
 entre la courbe et l'axe des y sera au contraire infinie. La
 raison de cette différence se trouve dans le plus ou moins
 de rapidité avec laquelle la courbe se rapproche d'une
 asymptote.

3°. Cercle.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\int_a^b y \, dx = \int_a^b dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

En général on a

$$\int dx \sqrt{R^2 - x^2} = x \sqrt{R^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= x \sqrt{R^2 - x^2} - \int \frac{(R^2 - x^2) dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \int \frac{R^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\int dx \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{R})^2}}$$

La dernière intégrale est avec fin $\frac{x}{R}$. Donc

$$\int du \sqrt{R^2 - u^2} = \frac{u}{2} \sqrt{R^2 - u^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{u}{R}$$

Si nous voulons avoir l'aire AMP, nous intégrerons entre les limites u et R , et nous aurons

$$\text{aire AMP} = -\frac{u}{2} \sqrt{R^2 - u^2} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{u}{R} \right)$$

$$= -\frac{u}{2} \sqrt{R^2 - u^2} + \frac{R^2}{2} \arccos \frac{u}{R}$$

ainsi le calcul intégral, ainsi bien que la géométrie élémentaire, donne l'aire du cercle en fonction de la circonférence du cercle de rayon 1. Et l'on ne peut en obtenir qu'une valeur approchée au moyen des séries.

4°. Ellipse. (voir au journal).

5°. Cycloïde.

Cette courbe étant rapportée à son sommet, son équation diff. est

$$dy = \sqrt{\frac{2a-x}{x}} dx$$

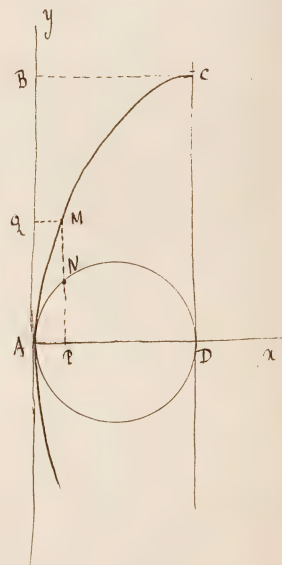
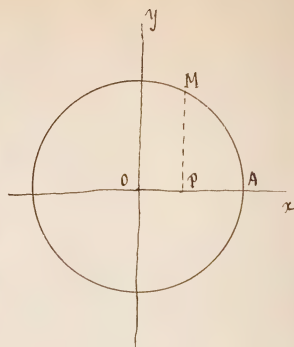
Nous emploierons ici la formule

$$\int_a^b y dx = (xy)_a^b - \int_a^b x dy$$

et pour avoir l'aire AMP, nous prendrons pour limites 0 et x . — D'abord, $(xy)_0^x$ sera xy , puisque ce rectangle est nul pour $x=0$, et nous avons

$$\text{aire AMP} = xy - \int_0^x dx \sqrt{2ax-x^2}$$

ou bien de chercher à déterminer cette intégrale, on compare l'aire AMP à la surface ANP du segment correspondant



Donc le cercle, dont l'éq. est

$$y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$\text{aire ANP} = \int_0^x dx \sqrt{2ax - x^2}$$

Or la

$$\text{aire AMP} = - \text{aire ANP} + xy$$

$$= \text{AQMP} - \text{aire ANP}$$

D'où l'on conclut encore que ANP est égal au triangle recti-
ligne AMQ.

Après cela, l'aire de la Demi-Cycloïde ACD est égale au
rectangle ABCD, diminué du Demi-cercle AND, ou bien

$$a^2 - 2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3}{2} \pi a^2$$

Si l'on considère la cycloïde entière, elle aura pour surface
 $3\pi a^2$; le cercle total décrit sur AD en est donc le tiers,
et divise sa surface en trois parties équivalentes.

aire d'une Courbe en Coordonnées Polaires.

on a en général

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

D'où

$$u = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\theta$$

1°. Spirales. - Soit en général

$$r = a \theta^m$$

on aura

$$u = \frac{a^2}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta^{2m} d\theta = \frac{a^2}{2(m+1)} \left[\theta_1^{2m+1} - \theta_0^{2m+1} \right]$$

Pour la Spirale d'Archimède, $m=1$, et l'équation devient

$$r = a\theta$$

En outre, nous posons pour plus d'exactitude $a = \frac{1}{2\pi}$, et alors la spirale, après une ^{1^{re}} révolution, vient couper l'axe polaire au même point A que le cercle de rayon 1. — L'aire de cette spirale comprise entre deux rayons faisant avec OA les angles θ_0 et θ , est exprimée par

$$u = \frac{1}{24\pi^2} (\theta^3 - \theta_0^3)$$

et si l'on suppose l'aire terminée d'un point à l'axe polaire,

$$u = \frac{1}{24\pi^2} \theta^3$$

après une ^{1^{re}} révolution, lorsque $\theta = 2\pi$, l'aire d'aire par le rayon vecteur est $\frac{1}{3}\pi$, c.à.d. le tiers du cercle OA, puisque $OA = 1$.

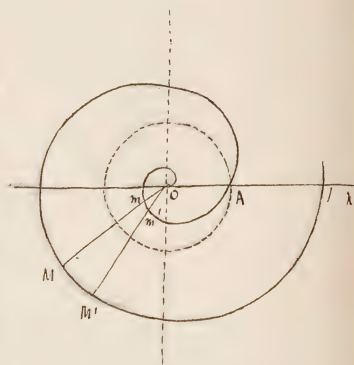
Après la ^{2^e} révolution, le rayon vecteur repasse sur l'axe déjà décrit dans la ^{1^{re}}, et ainsi de suite à chaque révolution : on voit que pour exprimer seulement l'aire terminée par la m^e révolution, il faut prendre d'abord l'intégrale $\frac{1}{2} \int r^2 d\theta$ entre les limites $2(m-1)\pi$ et $2m\pi$, ce qui donne

$$\frac{m^3 - (m-1)^3}{3} \pi$$

qui calcule l'aire terminée par la révolution suivante, ou la $(m+1)^e$, et, en retranchant, on aura pour l'espace compris entre les deux spirales

$$\frac{(m+1)^3 - m^3 + (m-1)^3}{3} \pi = 2m\pi$$

ce qui revient à 2π quand $m=1$, et montre que l'espace compris entre la m^e spirale et la $(m+1)^e$ est égal à m fois l'espace compris entre les deux premières.



549.

Soit donnée seulement l'aire $MM'mm'$. Cette aire peut être considérée comme la différence de deux secteurs OMM' et omm' . cherchons donc chacun d'eux. — Soit θ l'angle du rayon Om avec l'axe polaire, $\theta + \omega$ l'angle de OM' . Soit $R = OM$, et $r = om$. — on aura pour l'élément dA d'aire cherchée

$$\frac{1}{2} (R^2 - r^2) d\theta$$

A présent $R = \frac{1}{2\pi} (\theta + 2\pi)$, $r = \frac{1}{2\pi} \theta$. On substitue ces valeurs, et on intègre entre les limites θ et $\theta + \omega$, on aura l'expression de la surface cherchée.

La transformation en coordonnées polaires permet d'évaluer facilement l'aire du volume de Descartes, à l'expression de laquelle on arriverait difficilement par les coordonnées rectilignes. — Son équation est

$$x^3 - axy + y^3 = 0$$

Mais posons

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

et il vient

$$r^3 \cos^3 \theta - a \sin \theta \cos \theta + r^3 \sin^3 \theta = 0$$

Donc

$$r = \frac{a \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

ou

$$r = \frac{a \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta (1 + \operatorname{tg}^3 \theta)}$$

Par suite

$$u = \frac{a^2}{2} \int \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{[1 + \operatorname{tg}^3 \theta]^2} = \frac{a^2}{6} \int \frac{3 d \operatorname{tg} \theta \times \operatorname{tg}^2 \theta}{[1 + \operatorname{tg}^3 \theta]^2}$$

L'intégrale de cette quantité est facile à apercevoir : elle est

$$u = -\frac{a^2}{6} \frac{1}{(1+r^2\theta)} + C$$

Si nous voulons l'aire de la Demi-feuille AMB, nous devons prendre cette intégrale entre les limites 0 et $\frac{\pi}{4}$; ce qui nous donnera

$$u = -\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{12}$$

et $\frac{a^2}{6}$ pour l'aire de la feuille entière.

Spirale Logarithmique. —

$$r = a^{\theta}$$

$$du = \frac{1}{4} r^2 d\theta$$

$$u = \frac{1}{4} \int_a^{a^{\theta}} r^2 d\theta = \frac{1}{4 \ln a} (a^{\theta} - a^0)$$

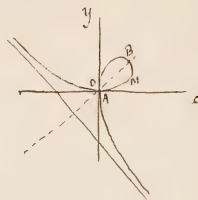
Savoir que a est $>$ ou $<$ 1, la courbe tourne de droite à gauche ou de gauche à droite au-dessus de l'axe polaire en s'éloignant du pôle qui est un point asymptotique. — Cela posé, dans les deux cas, à partir d'un rayon quelconque, on peut considérer deux arcs, l'un qui s'étend vers le point asymptote ; elle a constamment une valeur finie ; l'autre décrit par le rayon vecteur lorsque θ augmente, et qui croît au-delà de toute limite.

Rectification Des Courbes.

on sait qu'on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Par conséquent, pour rectifier une courbe, c'est. pour trouver



La longueur de l'arc de cette courbe entre deux points donnés, et
suffira d'intégrer cette expression entre les deux limites assignées,
après y avoir remplacé dy par sa valeur en fonction de dx
tirée de l'éq. de la Courbe.

Il pourra arriver qu'il soit plus commode d'exprimer x et y
en fonction d'une inconnue auxiliaire u :

$$x = \varphi(u) \quad y = \psi(u)$$

alors on aura

$$ds = du \sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}$$

1° Ellipse . -

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Pour avoir l'arc d'ellipse à partir du sommet du petit axe,
nous aurons à trouver

$$\int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$$

remplaçant y^2 par sa valeur $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, il vient

$$\int_0^x dx \frac{\sqrt{a^2 b^2 (a^2 - x^2) + b^4 x^2}}{ab \sqrt{a^2 - x^2}} = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$$

$a^2 - b^2$ est le carré de la distance du centre au foyer. Représentons
par e l'excentricité de cette distance au $\frac{1}{2}$ grand axe a , c.à.d.
l'excentricité de l'ellipse, nous aurons pour l'arc

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$$

quantité qu'on ne peut intégrer sous forme finie.

Soit M le point où se termine l'arc : désignons ce point

au centre de l'ellipse. Si, sur le grand axe, nous décrirons un cercle, et si nous prolongeons son diamètre ce cercle, nous aurons, en désignant par q l'angle, l'arc :

$$x = a \sin q$$

$$dx = a \cos q \, dq$$

et par la substitution de ces valeurs, l'intégrale devient

$$\int_0^q a \cos q \, dq \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 q}{1 - \sin^2 q}}$$

ou

$$\int_0^q a \, dq \sqrt{1 - e^2 \sin^2 q}$$

Mais pour nous obtenir au moyen des séries une valeur approchée de cette intégrale. — Si nous développons $a(1 - e^2 \sin^2 q)^{\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme, la série sera convergente, car $e < 1$ et $\sin q < 1$. Nous aurons ainsi

$$a(1 - e^2 \sin^2 q)^{\frac{1}{2}} = a \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 q - \frac{1}{8} e^4 \sin^4 q - \frac{1}{16} e^6 \sin^6 q - \dots \right]$$

on intégrera chaque terme multiplié par dq , et l'on aura

$$S = a \left[q - \frac{1}{2} e^2 \int_0^q \sin^2 q \, dq - \frac{1}{8} e^4 \int_0^q \sin^4 q \, dq - \frac{1}{16} e^6 \int_0^q \sin^6 q \, dq - \dots \right]$$

Chaque de ces intégrales est de la forme

$$\int \sin^m q \, dq$$

et l'on sait que

$$\int \sin^m q \, dq = -\frac{\sin^{m-1} q \cos q}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} q \, dq$$

Ainsi si l'on substitue dans la série les valeurs de diverses intégrales, on faisant successivement dans cette formule $m=2, 4, 6, \dots$ jusqu'à prendre les intégrales entre des limites données.

Si nous voulons la longueur de l'arc compris entre les extrémités

Du petit et du grand axe, nous interprétons entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La formule générale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi \, d\varphi = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \varphi \, d\varphi = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} \varphi \, d\varphi = \dots$$

et, comme m est pair, on arrivera à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi \, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\dots 1}{m(m-2)(m-4)\dots 2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{m(m-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ainsi enfin

$$S = \frac{\pi a}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1,3}{2,4}e^2\right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{1,3,5}{2,4,6}e^2\right)^5 - \dots \right\}$$

formule très convergente.

Rem. L'expression $\int_0^q \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$ a été démontrée par M^r. Liouville ne pouvoir se réduire à aucune des transcendentes connues. on en a fait une nouvelle classe sous le nom de Transcendante Elliptique.

on distingue trois espèces de fonctions elliptiques

$$1^\circ \int_0^q \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{que l'on représente par } F(e, q)$$

$$2^\circ \int_0^q d\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{" " } E(e, q)$$

$$3^\circ \int_0^q \frac{d\varphi}{(1-a \sin^2 \varphi) \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{" " } \Pi(e, q)$$

Il est un assez grand nombre de fonctions, telles que celle-ci

$$\int \frac{f(x) \, dx}{R} \quad R = \sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$$

qui se ramènent aux fonctions elliptiques. alors, au moyen des Tables de Legendre on trouve assez commodément les valeurs de ces intégrales entre deux limites données.

2°. Cycloïde. -

$$dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

Mais nous pourrions balayer l'arc AM

$$\int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{2a-x}{x}} = \int_0^x dx \sqrt{\frac{2a}{x}} = 2\sqrt{2ax}$$

et $\sqrt{2ax}$ est la longueur de la corde de l'arc correspondant à AM dans le cercle générateur : D'où que nous retrouvons ce théorème qu'il démontre dans le calcul différentiel : L'arc de Cycloïde est double de la corde correspondante dans le cercle générateur.

La Cycloïde entière est donc égale à 4 fois le diamètre de ce cercle.

En coordonnées Polaires, nous avons

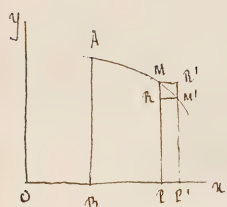
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Si l'on applique cette formule à la recherche de l'arc de spirale logarithmique, on aura à faire sur sa longueur des remarques analogues à celles qui ont été faites sur d'autres de la même courbe. - L'arc qui, à partir d'un point quelconque, s'étend en s'éloignant du point asymptotique, a une longueur infinie ; au contraire l'arc qui s'approche de ce point tend vers une limite finie : et si l'on suppose $a = e$, cette limite est $\pi\sqrt{2}$, π étant le rayon vecteur correspondant au point que l'on prend pour origine de l'arc.

Cubature et Quadrature

des
Surfaces.

Et, de même que dans la Géométrie élémentaire, les questions relatives à la cubature des surfaces sont beaucoup plus simples que celles qui ont pour objet leur quadrature. Et cela tient à ce que nous voyons immédiatement le rapport d'un solide de forme quelconque avec un cube de même, tandis que nous ne pouvons arriver à comparer une surface courbe avec une surface plane que par des considérations assez abstraites. — nous commencerons nous par les applications du Calcul Intégral relatives aux Cubatures.



1°. Solides De Révolution. — Nous allons d'abord, quoique ce ne soit pas le cas le plus général, le volume engendré par une courbe plane tournant autour de l'axe des x . Quelle est la différentielle de ce volume? — Soit PP' l'élément de dx donné à x , assez petit pour que, dans l'intervalle PP' , l'ordonnée aille constamment en croissant ou en décroissant. Le volume engendré par la révolution de $PP'M'M$ est compris entre les cylindres engendrés par la révolution de $MP P' R'$ et $R P P' M'$.

$$\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x < \Delta v < \pi y^2 \Delta x$$

$$\pi (y + \Delta y)^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi y^2$$

à la limite

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2 \quad dv = \pi y^2 dx$$

et par conséquent

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Pour le cas de la figure ci-contre, on aurait

$$V' = \pi \int_a^b (y^2 - y'^2) dx$$



Exemple. — Proposons-nous de déterminer le volume du tore, ou le volume engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan, mais ne passant pas par son centre. — Prenons pour axe des x l'axe de rotation, pour axe des y la perp. abaissée du centre du cercle sur cet axe de rotation. L'eq. du cercle sera

$$x^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

D'où

$$y = \beta + \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y' = \beta - \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y^2 - y'^2 = 4\beta \sqrt{R^2 - x^2}$$

Donc

$$V = 4\pi\beta \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

or cette intégrale est, à un facteur constant près, l'intégrale trouvée pour la quadrature du cercle. Nous ne pouvons donc la trouver. Seulement, nous pourrions la représenter par $\frac{1}{2}\pi R^2$. Donc

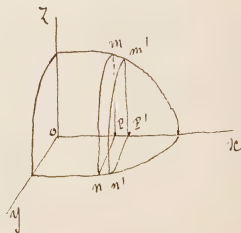
$$V = 2\pi^2 R^2 \beta$$

Ci que donnerait le théorème de Guldin.

Solides quelconques.

Théorème. — Soit x l'axe d'inslection mnP fait dans le solide par un plan parallèle à yoz, l'élément de volume de ce solide V a pour expression

$$dV = x dx$$



Pour le démontrer, je considère une section $m'n'p'$ parallèle à la 1^{re} et infiniment voisine: puis j'imagine deux cylindres parallèles à ox et ayant en deux bases ^{sectiones} pour bases. Dans le cas de la figure actuelle, ces deux cylindres se trouvent compris l'un dans l'autre, et nous avons

$$x' \Delta x < \Delta v < x \Delta x$$

$$x' < \frac{\Delta v}{\Delta x} < x$$

et à la limite

$$\frac{dv}{dx} = x$$

$$dv = x dx$$

Si les deux cylindres, au lieu des pointes sans se couper, étaient tels que leurs bases dans le plan de la section $m'n'p'$ eussent la position ici figurée, la démonstration devrait être un peu modifiée. Je représenterai par $x+d$ la portion commune aux deux bases, d devenant nul à la limite, puisque alors les deux bases se confondent, et j'écrirai pour $x+\beta$ la partie commune augmentée de deux parties non communes. J'aurai

$$(x+d) \Delta x < \Delta v < (x+\beta) \Delta x$$

$$x+d < \frac{\Delta v}{\Delta x} < x+\beta$$

On en conclura de même l'équation.

Nous avons donc pour l'expression du volume compris entre deux plans parallèles à yoz , et correspondant aux abscisses α et β

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} x dx$$

Exemple. - Soit l'ellipsoïde rapporté à ses axes principaux

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La section correspondante à l'abscisse x a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

et des axes sont $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$: D'où son aire

$$\pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

le quotient de cette quantité est X . on a donc, pour le volume de l'ellipsoïde,

$$\frac{\pi bc}{4} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

ou bien, en effectuant,

$$\frac{1}{6} \pi abc$$

Si nous supposons maintenant que les axes ne sont plus rectangulaires, la section toujours perpendiculaire au plan xyz n'estra plus perpendiculaire à oz : et si l'on désigne par λ l'angle de l'axe des x avec le plan de la section X , la hauteur du cylindre sera de $\sin \lambda$, et par suite, en calculant la démonstration précédente, nous aurons

$$dV = X dx \sin \lambda$$

$$V = \sin \lambda \int_0^b X dx$$

Exemple. — Soit l'application de cette formule à l'ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués obliques

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

La section correspondante à l'abscisse x a pour Eq.

$$\frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 - \frac{x^2}{a'^2}$$

et les diamètres conjugués sont

$$b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}} \quad c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}$$

Avec, en désignant par θ l'angle que font entre eux les diamètres b' et c' auxquels sont parallèles ceux que nous considérons, on aura pour l'aire de cette ellipse

$$\frac{\pi b'c'}{a'^2} (a'^2 - x^2) \sin \theta$$

et par suite, pour le volume du segment d'ellipsoïde,

$$V = \frac{\pi b'c'}{a'^2} \sin \theta \sin \lambda \int_0^a (a'^2 - x'^2) dx$$

$$V = \frac{\pi b'c'}{a'^2} \sin \theta \sin \lambda \left(a'^2 x - \frac{x^3}{3} \right)$$

et pour l'ellipsoïde entier, en intégrant entre $-a'$ et $+a'$,

$$\frac{4}{3} \pi a' b' c' \sin \theta \sin \lambda$$

Comparons cette expression à celle trouvée précédemment pour le même ellipsoïde rapporté à ses axes

$$\frac{4}{3} \pi abc$$

on trouve

$$abc = a' b' c' \sin \theta \sin \lambda$$

Tous les parallélépipèdes construits sur les diamètres conjugués de l'ellipsoïde sont équivalents.

on en déduit encore

$$\pi abc = \pi a' b' c' \sin \theta \sin \lambda$$

$$\pi ab \cdot c = \pi a' b' \sin \theta \cdot c' \sin \lambda$$

Tous les cylindres circonscrits à l'ellipsoïde et dont les bases sont parallèles aux plans des courbes de contact, sont équivalents.

Imaginons maintenant une surface quelconque dont l'éq. soit

$$F(x, y, z) = 0$$

Nous allons essayer de déterminer le volume compris entre cette surface et le plan des xy , deux plans parallèles à yz , et deux cylindres parallèles à oz , et ayant pour bases sur le plan yz les deux courbes

$$y = q(x) \quad y = \sqrt[3]{x}$$

équations qui dans l'espace, représentent les cylindres eux-mêmes. Ce volume est sur la figure le solide $CDEFIKLM$.

D'après la formule $V = \int x dx$, il suffit, pour déterminer le

l'ordre dans lequel les Intégrations doivent être effectuées n'est point du tout indifférent dans le cas général. Car si, à l'expression en question, on substitue celle-ci

$$\int_{q(a)}^{V(a)} dy \int_a^b z dx$$

on obtiendrait non plus le volume compris entre deux plans parallèles aux yz , et deux cylindres parallèles aux x , mais bien le volume détaché dans le solide par deux plans parallèles aux xz et deux cylindres parallèles aux x : et en effet, cette expression est ce que devient la s^{te} quand on change l'axe des x en l'axe des y et réciproquement.

Mais, si $q(a)$ et $V(a)$ étaient des constantes, c.àd. si les cylindres devenaient des plans, il est bien clair que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_c^d z dy$$

représente le même volume que celle-ci

$$\int_c^d dy \int_a^b z dx$$

et donc expression sont donc identiques.

Nous remarquons encore que, z pouvant être remplacé par $\int dz$, l'intégrale double précédente peut être remplacée par une intégrale triple

$$\int_a^b dx \int_{q(a)}^{V(a)} dy \int dz$$

et c'est sur cette intégrale triple surtout que peuvent être appuyés clairement les considérations exposées plus haut, d'où il résulte que cette méthode pour déterminer le volume d'un solide revient à le considérer comme composé d'une

infinie. Le petit élément parallélogrammique représenté par
 $dx dy$.

Si, au lieu de considérer le volume terminé inférieurement par le
 plan xy , on le suppose compris entre deux surfaces courbes
 $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, les limites latérales restant les
 mêmes, et ainsi d'une section parallèle au plan des yx serait

$$\int_{q(x)}^{z'(x)} (z - z') dy$$

et par suite le Volume aurait pour expression

$$V = \int_a^b dx \int_{q(x)}^{z'(x)} (z - z') dy$$

Supposons-nous de déterminer le volume d'un corps terminé
 de toutes parts par une surface courbe $f(x, y, z) = 0$. — Tra-
 çons un cylindre circonscrit à la surface parallèlement à l'axe
 des x : il faudra exprimer que ses plans tangents

$$\frac{df}{dx}(x' - x) + \frac{df}{dy}(y' - y) + \frac{df}{dz}(z' - z) = 0$$

sont verticaux, c.à.d. quel on a

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Cette Eq. combinée avec celle de la surface $f(x, y, z) = 0$ donnera
 l'Eq. de la surface du cylindre.

L'élimination de z entre cette dernière Eq. et celle de la surface
 donne une Eq. en x et y , $V(x, y) = 0$, qui est précisément
 l'Eq. de la base du cylindre sur xy . Cette courbe est, d'après
 notre hypothèse, une courbe fermée; et en la coupant
 par un plan parallèle à yo , on aura deux ordonnées
 $y = q(x)$ et $y_1 = q_1(x)$, qui seront les limites entre lesquelles
 devra être prise l'intégrale $\int (z - z') dy$: x et x' étant d'ailleurs

Les valeurs de x qui, dans ce plan, correspondent à une même valeur de y . Si maintenant on désigne par a et b les distances du plan xy aux plans tangents à la surface qui lui sont parallèles, on aura pour le volume du corps

$$\int_a^b dx \int_{q(x)}^{Q(x)} (x-x') dy$$

ou

$$\int_a^b dx \int_y^{y'} (x-x') dy$$

Exemple. — Soit une sphère ayant son centre à l'origine, et un cylindre parallèle aux x et ayant pour base le cercle décrit sur le rayon de la sphère comme diamètre. on demande de trouver le volume compris entre le plan des xy , la surface de la sphère, celle du cylindre, et le plan des xz , ou bien, ce qui reste de l'intersection de la sphère quand on en a enlevé le volume d'écoupe par le demi-cylindre.

Prenons la formule

$$V = \int_a^b dx \int_{q(x)}^{Q(x)} x dy$$

il s'agit simplement de déterminer les limites a et b , $q(x)$ et $Q(x)$.

Alors les limites a et b ne sont autre chose que 0 et r , rayon de la sphère. — Quant à $q(x)$, il est aussi nul: mais alors chercher $Q(x)$. Quelle est sur le plan des xy la projection de l'intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

avec le cylindre

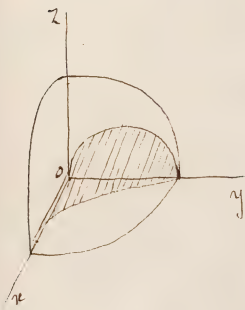
$$x^2 + y^2 - xy = 0$$

Cette projection est

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Donc

$$q(x) = y = \frac{r^2 - x^2}{x}$$



Le volume en question est donc

$$\int_0^r dx \int_0^{\frac{r^2-x^2}{r}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy$$

Nous avons d'abord

$$\int dy \sqrt{r^2-x^2-y^2} = y \sqrt{r^2-x^2-y^2} + \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = - \int \sqrt{r^2-y^2-x^2} dy + \int \frac{(r^2-x^2) dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

et enfin, comme

$$(r^2-x^2) \int \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = (r^2-x^2) \operatorname{arcsin} \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

il vient

$$\int dy \sqrt{r^2-x^2-y^2} = \frac{y \sqrt{r^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{r^2-x^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

et l'intégrale définie sera, après réduction

$$\int_0^{\frac{r^2-x^2}{r}} dy \sqrt{r^2-x^2-y^2} = \frac{x}{2r^2} (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (r^2-x^2) \operatorname{arccos} \frac{x}{r}$$

Nous aurons en conséquence

$$V = \int_0^r \frac{x}{2r^2} (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^r (r^2-x^2) \operatorname{arccos} \frac{x}{r} dx$$

or

$$\frac{1}{2r^2} \int x (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{10r^2} (r^2-x^2)^{\frac{5}{2}}$$

et par suite

$$\frac{1}{2r^2} \int_0^r x (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{10r^2}$$

Maintenant,

$$\frac{1}{2} \int (r^2-x^2) \operatorname{arccos} \frac{x}{r} dx = \frac{1}{2} \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \operatorname{arccos} \frac{x}{r} + \frac{1}{2r} \int \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}$$

Le 1^{er} terme devient nul aux limites 0 et r , je ne considère que la dernière intégrale. or on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2r} \int (r^2 u - \frac{u^3}{2}) \frac{du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{r^2}}} &= \frac{1}{6} \int \frac{(3r^2 - u^2)u du}{\sqrt{r^2 - u^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{(r^2 - u^2 + 2r^2)u du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \\
&= \frac{1}{6} \int (r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} u du + \frac{1}{3} r^2 \int (r^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} u du \\
&= -\frac{1}{12} \int (r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} d(-u^2) - \frac{1}{6} r^2 \int (r^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} d(-u^2) \\
&= -\frac{1}{12} \frac{(r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} r^2 \frac{(r^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{18} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} r^2 (r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Si l'on prend cette quantité entre les limites 0 et r , on aura

$$+\frac{1}{18} r^3 + \frac{1}{3} r^3 \quad \text{ou} \quad \frac{7}{18} r^3$$

Ainsi enfin

$$V = \frac{1}{10} r^3 + \frac{7}{18} r^3 = \frac{22}{45} r^3$$

Calcul de l'aire d'un Solide en Coordonnées polaires.

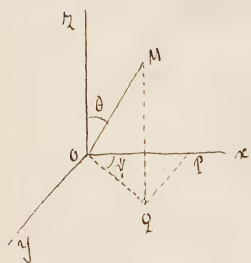
En Coordonnées polaires, la position d'un point dans l'espace se définit au moyen de l'angle ψ que fait avec l'axe oz la projection du rayon vecteur sur le plan xy , la longueur r du rayon vecteur, et l'angle θ que celui-ci fait avec l'axe oz . Nous avons donc

$$x = r \sin \theta \cos \psi$$

$$y = r \sin \theta \sin \psi$$

$$z = r \cos \theta$$

Cela revient à déterminer le point M par l'intersection de



deux surfaces, une sphère, un cône et un plan : une sphère, de rayon r ; un cône engendré par les rayons qui font avec Ox l'angle constant θ ; et un plan d'un des rayons dont la projection sur xy fait avec Ox un angle ψ .

Cela posé, l'élément de volume se définira facilement. Soit un point m' voisin de M ; il sera, comme le premier, déterminé par trois surfaces qui, avec les trois premières, comprimeront un certain volume. dont la génération est facile à apercevoir. Prolongeons le rayon vecteur OM d'une longueur $MP = dr$; et faisons tourner ce rayon autour de Ox d'un angle $d\psi$: nous aurons un quadrilatère PR , et faisant enfin tourner ce quadrilatère d'un angle $d\theta$, nous aurons le volume MM' compris entre deux sphères, deux cônes et deux plans. — Et les accroissements $d\theta$, $d\psi$ et dr étant infiniment petits, ce sera là l'élément de volume. Or il peut être considéré comme un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont dr , $r d\theta$ et $r \sin \theta d\psi$: car le point où vont converger les arêtes étant à une distance finie, est à une distance infinie relativement à la quantité dr , $d\psi$ et $d\theta$ ainsi

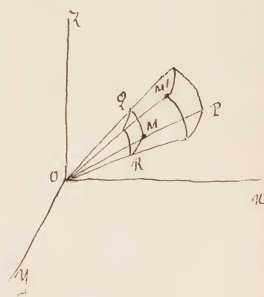
$$r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi$$

sera l'expression de l'élément de volume : et le volume lui-même sera la somme de ces éléments, ou

$$\iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi$$

Mais nous devons maintenant deux cas à distinguer, suivant que l'origine O est dans l'intérieur du solide ou à l'extérieur.

1°. L'origine est dans l'intérieur du solide. — Regardons



Si θ et ψ sont des constantes, et indépendantes par rapport à r entre les limites 0 et r :

$$\int_0^r \sin \theta \, d\theta \, d\psi \int_0^r r'^2 \, dr'$$

représente un filot conique d'éléments de volume semblable à celui que comprennent les rayons infiniment voisins OM , OM' , OM'' et OM''' . Or

$$\int_0^r r'^2 \, dr' = \frac{r^3}{3}$$

et, d'après l'eq. de la surface $r = f(\theta, \psi)$, on aura

$$\frac{1}{3} \int \sin \theta \, d\theta \left[f(\theta, \psi) \right]^3 \, d\psi$$

Intégrant maintenant par rapport à θ entre les limites 0 et 2π , nous aurons l'expression d'une série de filots coniques compris dans toute l'étendue d'une section passant par l'axe des z .

Cette intégration ne peut que l'indiquer tant que $f(\theta, \psi)$ n'est pas particulière. Mais qu'il en soit, l'expression se réduira à une fonction différentielle de ψ , $F(\psi) \, d\psi$. Pour avoir le volume total, il suffit de correspondre dans tous les éléments la trace qui représente cette expression, en d'autres termes d'intégrer entre les limites 0 et 2π .

$$V = \int_0^{2\pi} F(\psi) \, d\psi$$

2°. L'origine est en dehors du corps. Dans ce cas, il arrive nécessairement qu'à chaque valeur de θ et de ψ correspondent au moins deux valeurs de r . Si on les désigne par r' et r'' , ces valeurs exprimées en fonction de θ et de ψ seront les limites entre lesquelles devra être prise la 3^{e} intégrale.

Maintenant, à chaque valeur de ψ correspondent deux valeurs de θ , pour lesquelles le rayon vecteur est tangent à la section déterminée par le plan AOZ : les angles θ' et θ'' que font

ces tangentes avec l'axe des x sont les limites entre lesquelles devra se faire la seconde intégration. on comprend d'jà combien la détermination de ces limites pourra être compliquée dans la pratique.

Enfin, parmi tous les plans menés suivant oz il en est deux qui sont tangents au corps, et le comprennent entre eux. Les angles ψ' et ψ'' que font avec oz les arêtes de ces plans sur oxy sont les limites entre lesquelles on devra intégrer par rapport à ψ . — Ceci suppose que le solide ne rencontre pas l'axe oz : si celui-ci traverse le corps, il faut prendre la dernière intégrale entre les limites 0 et 2π .

Quadrature Des Surfaces.

on regardera avec d'une surface courbe comme la limite de la somme des éléments plans d'une surface polyédrale inscrite ou circonscrite, dont les faces deviennent de plus en plus petites à mesure qu'elles augmentent en nombre. — L'existence de cette limite est démontrée pour les raisonnements mêmes qui en déterminent la valeur.

Considérons d'abord les Surfaces de Révolution. — L'aire d'une telle surface peut être considérée comme la limite de la surface engendrée par un polygone inscrit dans la courbe méridienne, et entraîné dans son mouvement de rotation. Cette aire sera conséquemment la limite de la somme des surfaces d'une série de troncs de cône dont un quelconque a pour surface latérale

$$\Delta s = \{ \pi y + \pi (y + \Delta y) \} \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

$$\Delta s = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$$

$$\Delta s = \left\{ 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} + \pi \Delta y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \right\} \Delta x$$

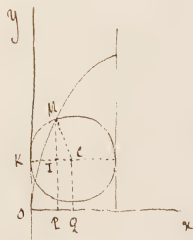
et à la limite

$$ds = 2\pi y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

car la partie qui contient Δy est nulle à la limite. Donc

$$S = 2\pi \int y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \int y ds$$

S étant la longueur de l'arc de courbe considérée. — on donnerait également à cette démonstration toute la rigueur désirable, en appliquant ici presque mot pour mot le raisonnement qui a été fait lors de la recherche de la différentielle de l'arc de courbe.



Comme application de cette formule, cherchons la surface engendrée par l'arc de cycloïde. — Il est commode d'introduire un angle auxiliaire $u = \text{mch}$. Nous aurons

$$x = a(1 - \cos u)$$

$$y = a(u + \sin u)$$

Donc

$$dx = a \sin u du \quad dy = a(1 + \cos u) du$$

$$ds = a du \sqrt{2 + 2 \cos u} = a du \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos u} = 2a du \cos \frac{1}{2} u$$

Donc

$$S = 2\pi \int_0^u y ds = 4\pi a^2 \int_0^u (u + \sin u) \cos \frac{1}{2} u du$$

$$S = 4\pi a^2 \int_0^u u \cos \frac{1}{2} u du + 4\pi a^2 \int_0^u \sin u \cos \frac{1}{2} u du$$

La seconde intégrale est $8\pi a^2 \int_0^u \sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u du$ ou bien

$$\frac{16\pi a^2}{3} \cos^3 \frac{1}{2} u - \frac{16\pi a^2}{3}$$

La 1^{re} intégrale s'obtient facilement par l'intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int u \cos \frac{1}{2} u \, du &= 2u \sin \frac{1}{2} u - 2 \int \sin \frac{1}{2} u \, du \\ &= 2u \sin \frac{1}{2} u + 4 \cos \frac{1}{2} u\end{aligned}$$

et

$$\int_0^u u \cos \frac{1}{2} u \, du = 2u \sin \frac{1}{2} u + 4 \cos \frac{1}{2} u - 4$$

Ainsi

$$S = \left(2u \sin \frac{1}{2} u + 4 \cos \frac{1}{2} u \right) 4\pi a^2 + \frac{16\pi a^2}{3} \left(\cos^2 \frac{1}{2} u - 1 \right)$$

En faisant dans cette expression $u = \frac{\pi}{2}$, on aura la surface engendrée par la moitié d'un cycloïde; ce sera

$$S' = \left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 4\pi a^2 + \frac{16\pi a^2}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$S' = 2\pi^2 a^2 \sqrt{2} + \frac{24}{3} \pi a^2 \sqrt{2} - \frac{16}{3} \pi a^2$$

Surfaces Quelconques.

L'expression d'une surface quelconque est

$$S = \iint dx \, dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$p = \frac{dx}{dz} \quad q = \frac{dy}{dz}$$

Pour démontrer cette formule, menons quatre plans respectivement parallèles à chacun des deux plans xz et yz . Ils formeront un prisme droit à base rectangulaire dont la base sera $\Delta x \, \Delta y$. Ce prisme déterminera sur la surface un quadrilatère courviligne MM' . Il enveloppera aussi le polyèdre inscrit suivant un quadrilatère gauche qui sera décomposé en un certain nombre de petits triangles élémentaires a, a', a'' . Désignons par λ l'angle que fait le plan tangent en M avec le plan xy . Nous savons que

$$\frac{1}{\cos \lambda} = \sqrt{1+p^2+q^2} \quad \text{ou} \quad \cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

par définition, la surface courbe ouverte. Il reste donc à voir si cette limite existe, et quelle en est la valeur.

$$\text{or} \quad \lim \Sigma (\alpha x + \alpha' x' + \dots) = 0$$

En effet, on peut toujours prendre Δx et Δy assez petits, c.à.d. le point m sera voisin de M , pour que $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ soient moindres que ϵ , quantité aussi petite que l'on voudra. Donc

$$\Sigma (\alpha x + \alpha' x' + \dots) < \epsilon \Sigma (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots) < \epsilon \Sigma M$$

or ΣM est une quantité finie, ϵ tend vers zéro : donc on peut dire que le 1^{er} membre a pour limite zéro.

$$\text{Donc} \quad \lim \Sigma M = \lim \Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda}$$

Prions nous maintenant que $\Sigma \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda}$ a une limite : et, pour y parvenir, faisons voir que cette somme représente un volume, c.à.d. quelque chose défini et d'une détermination.

on peut représenter $\frac{1}{\cos \lambda} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ comme l'ordonnée d'une surface. représentons-la par z . L'expression devient

$$\Sigma z \Delta x \Delta y$$

La surface dont l'ordonnée est z sera coupée par le prisme PZ' suivant un quadrilatère courbiline. La portion de volume comprise dans ce prisme entre ce quadrilatère et le plan xy sera un élément de volume. Dans l'étendue de l'élément courbiline découpé par le prisme sur la surface, l'ordonnée z varie de la plus grande valeur z_1 à la plus petite z_2 : d'après cela, l'élément de volume est compris entre

$$\Delta x \Delta y z_1 \quad \text{et} \quad \Delta x \Delta y z_2$$

on peut donc écrire, en désignant pour Δv cet élément

$$\Delta v = \Delta x \Delta y z (1 + \epsilon)$$

ϵ tendant vers zéro. — Maintenant, la somme des éléments

Soit donner

$$\lim \sum \Delta V \text{ ou } V = \lim \sum z \Delta x \Delta y (1 + \epsilon)$$

$$V = \lim \sum z \Delta x \Delta y + \lim \sum z \Delta x \Delta y \epsilon$$

La dernière quantité a pour limite zéro: en effet, soit ω la plus grande valeur de ϵ .

$$\sum z \Delta x \Delta y \epsilon < \omega \sum z \Delta x \Delta y$$

Le second membre tend vers zéro. Donc

$$V = \lim \sum z \Delta x \Delta y$$

Cad. que $\sum \Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2}$ a une limite finie: c'est la valeur de V . Cette valeur, comme on sait, est donnée par la formule

$$V = \int_a^b dx \int_{q(x)}^{p(x)} z dy$$

Nous aurons donc l'expression de la surface comprise entre les mêmes limites, en remplaçant z par sa valeur.

$$S = \int_a^b dx \int_{q(x)}^{p(x)} dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

La formule se trouve ainsi démontrée.

Différentiation sous le signe \int .

L'objet de cette opération est de trouver la Différentielle
d'une Intégrale indiquée par rapport à une Variable Différente
de celle sur laquelle porte l'intégration.

Soit l'expression

$$u = \int f(x, z) dx$$

il s'agit de la Différentier par rapport à z , sans effectuer
l'intégration relative à x .

et je dis qu'on a

$$\frac{du}{dz} = \int \frac{d f(x, z)}{dz} dx$$

En effet

$$\frac{du}{dx} = f(x, z)$$

$$\frac{d \frac{du}{dx}}{dz} = \frac{d f(x, z)}{dz}$$

ou, comme on peut intervertir l'ordre des Différentiations,

$$\frac{d \frac{du}{dz}}{dx} = \frac{d f(x, z)}{dx}$$

$$d \frac{du}{dz} = \frac{d \cdot f(x, z)}{dx} dx$$

Donc

$$\frac{du}{dz} = \int \frac{d \cdot f(x, z)}{dx} dx \quad \text{c. q. f. d.}$$

Cela convient pour une Intégrale Indéfinie. - Si l'on y

est joint une constante explicite, que serait-elle devenue après l'opération ? Pour répondre à cette question, nous allons aborder le cas des intégrales définies, qui la résoudra complètement.

Supposons d'abord que a n'est que dans les limites a et b .
Prenons

$$\int f(x) dx = F(x)$$

nous aurons

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

En différenciant

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx = \frac{d}{da} F(b) - \frac{d}{da} F(a) = F'(b) \frac{db}{da} - F'(a) \frac{da}{da}$$

$\frac{db}{da}$ et $\frac{da}{da}$ sont connus : $F'(b)$ et $F'(a)$ nous sont connus
Ajouté que $f(b)$ et $f(a)$. Donc

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx = f(b) \frac{db}{da} - f(a) \frac{da}{da}$$

Supposons maintenant que le paramètre entre partout,
dans a , b , et dans la fonction soumise au signe \int . Prenons

$$\int f(x, z) dx = F(x, z)$$

Alors nous aurons

$$\int_a^b f(x, z) dx = F(b, z) - F(a, z)$$

Le 2^e membre est fonction de a , b et de z , a et b sont const.
Prenons z : le second membre est donc une fonction de z . En
le désignant par u , on aura

$$\left(\frac{du}{dz} \right) = \frac{du}{db} \frac{db}{dz} + \frac{du}{da} \frac{da}{dz} + \frac{du}{dz}$$

Les deux premiers termes du second membre s'obtiennent facilement en prenant le dernier. Pour l'obtenir, il faut supposer a et b constants, et z seule variable. Donnons à z l'accroissement Δz , et prenons l'accroissement Δu , et, l'on aura

$$\Delta u = \int_a^b [f(x, z + \Delta z) - f(x, z)] dx$$

$$u + \Delta u = \int_a^b f(x, z + \Delta z) dx$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\int_a^b f(x, z + \Delta z) dx - u}{\Delta z}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \int_a^b \frac{f(x, z + \Delta z) - f(x, z)}{\Delta z} dx$$

nous introduisons Δz sous le signe \int parce que Δz est indépendant de x pour rapport à qui l'intégration doit s'effectuer. et, à la limite,

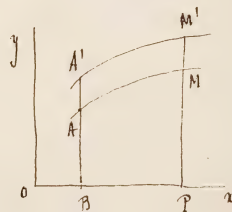
$$\frac{du}{dz} = \int_a^b \frac{d f(x, z)}{dz} dx$$

on a donc enfin

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{db} \frac{db}{dz} + \frac{du}{da} \frac{da}{dz} + \int_a^b \frac{d f(x, z)}{dz} dx$$

Rem. on peut interpréter ces résultats géométriquement, ce qui fournit une nouvelle démonstration de l'équation d'analyse.

Pour $y = f(x, z)$. Nous pouvons regarder y comme l'élémentaire d'une courbe AM . Soit nous considérons la surface entre les limites A et M . Supposons que ces limites ne dépendent pas de z . Si nous donnons à z un accroissement Δz , nous aurons une seconde courbe $A'M'$ voisine de la 1^{re}.



$$\int_a^b f(x, z) dx = \text{aire } ABM?$$

$$\int_a^b f(x, z + \Delta z) dz = \text{aire } A'B'M'P$$

d'augmentation Δu de l'aire correspondant à l'augmentation Δz de la différence de ces deux intégrales

$$\int_a^b f(x, z + \Delta z) dz - \int_a^b f(x, z) dz = \text{aire } AA'M'M' = \Delta u$$

ou bien, à la limite,

$$du = dz \int_a^b \frac{df(x, z)}{dz} dz$$

résultat que nous aurait donné l'analyse.

Interprétation sous le signe \int .

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x, z) dz$$

les limites a et b étant des constantes; et supposons qu'on veuille obtenir l'intégrale de cette intégrale par rapport à z ; en d'autres termes, soit à effectuer

$$\int_m^n dz \int_a^b f(x, z) dz$$

et de question peut intervenir l'ordre des intégrations, c. ad. que

$$\int_m^n dz \int_a^b f(x, z) dz = \int_a^b dz \int_m^n f(x, z) dz$$

Ce principe a déjà été démontré quand il s'agit aussi de la cubature des solides. En effet, ces deux intégrales représentent toutes deux le volume compris entre la surface $z = f(x, z)$ le plan des xy , et 2 plans, dont deux parallèles aux

xz , et deux aux yz . — Mais il est facile d'en trouver la raison analytique.

Considérons l'intégrale indéfinie par rapport à x .

$$\int dx \int_a^b f(x, z) dz = \int_a^b dx \int f(x, z) dz$$

Cette égalité sera vraie, du moins à une constante près indépendante de z , si nous faisons voir que les différentielles sont les mêmes. Or, en différentiant sous le signe \int , nous avons

$$\text{D'une part} \quad \int_a^b f(x, z) dz$$

$$\text{D'autre} \quad \int_a^b dx f(x, z)$$

La proposition est donc vraie pour l'intégrale indéfinie. Si nous introduisons une limite inférieure z_0 , la constante s'annule, et nous avons exactement

$$\int_{z_0}^z dx \int_a^b f(x, z) dz = \int_a^b dx \int_{z_0}^z f(x, z) dz$$

Maintenant, cette égalité étant vraie quelque valeur que l'on donne à la limite supérieure z , on aura encore, en posant spécialement cette valeur

$$\int_{z_0}^{z_1} dx \int_a^b f(x, z) dz = \int_a^b dx \int_{z_0}^{z_1} f(x, z) dz$$

c. q. f. d.

appliquons ce principe à la recherche de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{x}$$

on arrivera à

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \, dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} + & \text{si } a > 0 \\ - & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

formule utile dans la Physique Mathématique.

Pour y arriver, considérons d'abord l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \sin ax \, dx$$

d'intégration par parties nous donne

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \sin ax \, dx = -\frac{e^{-mx} \cos ax}{a} - \frac{m}{a} \int_0^{\infty} \cos ax \, e^{-mx} \, dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \cos ax \, dx = \frac{e^{-mx} \sin ax}{a} + \frac{m}{a} \int_0^{\infty} \sin ax \, e^{-mx} \, dx$$

Donc enfin

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \sin ax \, dx = -\frac{a}{m^2 + a^2} e^{-mx} \cos ax - \frac{m}{m^2 + a^2} e^{-mx} \sin ax$$

Entre les limites données

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \sin ax \, dx = \frac{a}{m^2 + a^2}$$

Car, pour $x = \infty$, e^{-mx} devenant nul, et $\cos ax$, $\sin ax$ étant toujours compris entre -1 et $+1$, le second membre se réduit à zéro.

Maintenant, multiplions par dm les deux membres, et intégrons

$$\int dm \int_0^{\infty} e^{-mx} \sin ax \, dx = \int_0^{\infty} \sin ax \, dx \int e^{-mx} \, dm = \int_0^{\infty} \sin ax \, dx \cdot \left(-\frac{e^{-mx}}{a} \right)$$

Mais le second membre devient

$$\int \frac{a \, dm}{m^2 + a^2} = \arctan \frac{m}{a} + C$$

Donc

$$\int_0^{\infty} \sin ax \, dx \cdot \left(-\frac{e^{-mx}}{a} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{sous le signe d}'x.$$

Si maintenant dans cette formule j'ai fait $m=0$, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{c'est-à-dire.}$$

La différentiation sous le signe \int est un moyen de développer des intégrales, en partant d'intégrales définies connues, et les différentiant par rapport à une constante.

Formule de Fourier. — $F(x)$ étant une fonction quelconque de x , on a

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} F(x) \cos p(x-x) \, dp$$

occupons-nous d'abord de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \cos p(x-x) \, dp$$

on a

$$\int_0^p \cos p(x-x) \, dp = \frac{\sin p(x-x)}{x-x}$$

avant de faire croître p au delà de toutes limites, j substitue,

et j'obtiens

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, F(x) \frac{\sin p(x-x)}{x-x}$$

Je pose $x-x = -\frac{z}{p}$ d'où $x = x + \frac{z}{p}$, et il vient

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x + \frac{z}{p}\right) \frac{\sin z}{z} \, dz$$

Lorsque p devient infiniment grand, $\frac{z}{p}$ devient infiniment petit : il est vrai qu'il n'en serait pas ainsi si x devenait

sin. même très-grand: mais alors $\frac{\sin x}{x}$ deviendrait très-petit;
 - il est donc permis de négliger $\frac{1}{x}$: et alors nous avons

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} F(x) \times \pi = F(x)$$

en intégrant $\frac{\sin x dx}{x}$, d'après la formule trouvée tout à l'heure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \pm \pi$$

Cette démonstration est due à Depleers, ancien Dir. Del' Ecole Normale.

on emploie encore, pour trouver une Intégrale Définie, une autre méthode, qui consiste à ramener l'intégrale simple à une Intégrale Double, l'indépendance des deux variables pouvant parfois conduire à des simplifications. Soit l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

et désignons par K sa valeur. Elle est identique à

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

donc, en multipliant,

$$K^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

or y est indépendant de x : on peut donc faire passer e^{-y^2} dans la seconde intégrale, et l'on a ainsi une intégrale Double

$$K^2 = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

or cette Intégrale Double représente le quart du volume compris entre le plan xy et la surface $z = e^{-x^2-y^2}$, et qui est mesurée par l'extension autour de oz de la courbe $z = e^{-x^2}$. — Découpons ce volume en cylindres ayant oz pour axe, soient deux de ces cylindres infiniment voisins. La base du 1^{er} étant πx^2 , celle du suivant sera $\pi (x+\Delta x)^2$, et par suite la différence de ces bases a pour expression

$$2\pi x \Delta x + \pi \Delta x^2$$

et à la limite,

$$2\pi x dx.$$

Quant à la hauteur, c'est la valeur de z correspondant sur la courbe génératrice, à la valeur x de l'abscisse, ou bien $z = e^{-x^2}$. ainsi, en définitive, l'élément de volume a pour expression

$$2\pi e^{-x^2} x dx$$

Le volume total aura pour valeur l'intégrale de cette expression, prise entre les limites 0 et ∞ , ou

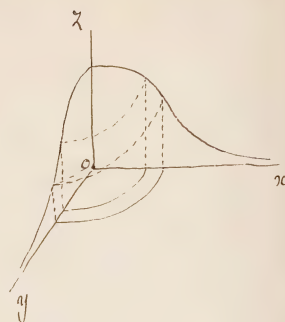
$$\int_0^{\infty} 2\pi e^{-x^2} x dx = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

et par conséquent le volume compris dans l'angle trièdre des coordonnées positives aura pour expression

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

or $\int e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$, donc $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}$, et nous avons enfin

$$V^2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{Donc } V = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



ainsi

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

en changeant x en $x\sqrt{a}$, il vient

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

En différenciant cette expression relativement à a , nous aurons
des résultats nouveaux

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^{-\frac{3}{2}}$$

En différenciant une seconde fois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\pi} a^{-\frac{5}{2}}$$

Donc, après n différenciations :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \sqrt{\pi} a^{-\frac{2n+1}{2}}$$

Chaque fois que l'expression primitive x en $x+a$: les
limites restent les mêmes, et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+a)^2} dx = e^{-a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx = e^{\frac{a^2}{1}} \sqrt{\pi}$$

Cette formule semble supposer que a est réel : car elle -

est défini d'une autre dans laquelle x est essentiellement positif.
 Néanmoins il est permis de donner à a une valeur imaginaire. En effet, nous pouvons développer les deux membres en série suivant les puissances ascendantes de a :
 et comme ces séries seront convergentes, les coefficients des mêmes puissances de a dans chacune d'elles devront être respectivement égaux, et alors, comme ces coefficients ne changent pas quelque valeur que l'on donne à a , on pourra, sans troubler l'égalité, remplacer a par $a\sqrt{-1}$. Effectuons ce changement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - 2ax\sqrt{-1}} dx = e^{-\frac{a^2}{\sqrt{-1}}} \sqrt{\pi}$$

ou bien, comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \left(e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} \right) dx = e^{-\frac{a^2}{\sqrt{-1}}} \sqrt{\pi}$$

ou

$$e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} = 2 \cos 2ax$$

donc

$$2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = e^{-\frac{a^2}{\sqrt{-1}}} \sqrt{\pi}$$

C'est ici que se plaçant les intégrales Eulériennes,

p. 229.

A

L

I

De

m

C

the

the

m

m

ut

m

A

H

Nouveaux Compléments.

applications
et
Théories Diverses.

Ammonia

Ammonia

Ammonia

Série de Lagrange.

Le but que nous nous proposons est de développer la valeur de z , fournie par l'équation

$$z = x + y f(z) \quad (1)$$

suivant les puissances ascendantes de y , qui, dans les applications, est d'ordinaire un nombre très-petit.

Il est clair que z peut être regardé comme une fonction implicite des deux variables indépendantes x et y , soit $z = \pi(x, y)$. Nous aurons donc par la série de Mercator

$$z = \pi(x, 0) + \frac{y}{1} \pi'(x, 0) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \pi''(x, 0) + \dots$$

ou bien, en remarquant que, pour $y = 0$, on a $z = x$,

$$z = x + \frac{y}{1} \left(\frac{dz}{dy} \right)_{y=0} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right)_{y=0} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d^3 z}{dy^3} \right)_{y=0} + \dots$$

La seule difficulté est de trouver la valeur générale de $\frac{d^n z}{dy^n}$.

Pour cela, différencions l'Eq. (1) successivement par rapport aux deux variables x et y . Il viendra

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 1 + y f'(z) \frac{dz}{dx} \\ \frac{dz}{dy} = f(z) + y f'(z) \frac{dz}{dy} \end{cases}$$

D'où évidemment

$$\frac{dz}{dy} = f(z) \frac{dz}{dx} \quad (2)$$

les valeurs montrent encore que, pour $y=0$, on a $\frac{dx}{dy}=1$

Maintenant, pour avoir les coefficients différentiels suivants, nous allons établir une formule générale qui les donnera commodément.

Soit ψz une fonction quelconque de x . Nous aurons

$$\frac{d}{dy} \left(\psi z \frac{dx}{du} \right) = \psi z \frac{d^2 x}{du dy} + \psi' z \frac{dx}{du} \frac{dx}{dy}$$

Remplaçons $\frac{dx}{dy}$ par sa valeur (1) qui est

$$\frac{dx}{dy} = f z \frac{dx}{du} \quad (2)$$

et $\frac{d^2 x}{du dy}$ par la valeur qu'on en tire et que voici :

$$\frac{d^2 x}{du dy} = f' z \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + f z \frac{d^2 x}{du^2} \quad (3)$$

il viendra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(\psi z \frac{dx}{du} \right) &= \psi z f' z \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \psi z f z \frac{d^2 x}{du^2} + \psi' z f z \left(\frac{dx}{du} \right)^2 \\ &= \psi z f z \frac{d^2 x}{du^2} + \left\{ \psi z f' z + \psi' z f z \right\} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 \end{aligned}$$

enfin

$$\frac{d \left(\psi z \frac{dx}{du} \right)}{dy} = \frac{d \left(\psi z f z \frac{dx}{du} \right)}{du} \quad (4)$$

Cela posé, en ayant égard à cette formule, c.à.d. en remplaçant incessamment ψz par $f z$, par $(f z)^2$, $(f z)^3$ etc. on aura de proche en proche

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left\{ f z \frac{dx}{du} \right\} = \frac{d \left\{ (f z)^2 \frac{dx}{du} \right\}}{du}$$

$$\frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left[\frac{d \left\{ (f z)^2 \frac{dx}{du} \right\}}{du} \right] = \frac{d}{du} \left[\frac{d \left\{ (f z)^3 \frac{dx}{du} \right\}}{dy} \right] = \frac{d^2 \left\{ (f z)^3 \frac{dx}{du} \right\}}{du^2}$$

$$\frac{d^4 x}{dy^4} = \frac{d}{dy} \left[\frac{d^2 \left\{ (f z)^3 \frac{dx}{du} \right\}}{du^2} \right] = \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{d \left\{ (f z)^4 \frac{dx}{du} \right\}}{dy} \right] = \frac{d^3 \left\{ (f z)^4 \frac{dx}{du} \right\}}{du^3}$$

et il est clair qu'en continuant, on aura généralement :

$$\frac{d^n z}{dy^n} = \frac{d^{n-1} \left\{ (fz)^n \frac{dz}{dx} \right\}}{dx^{n-1}}$$

Si maintenant on fait $y=0$ de où $z=x$ et $\frac{dz}{dx}=1$, il vient

$$\left(\frac{d^n z}{dy^n} \right)_{y=0} = \frac{d^{n-1} (fz)^n}{dx^{n-1}}$$

et en reportant dans la série de Mac-Laurin, on a celle de Lagrange :

$$z = x + \frac{y}{1} fz + \frac{y^2}{1.2} \frac{d(fz)}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3} \frac{d^2(fz)}{dx^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} \frac{d^3(fz)}{dx^3} + \dots \quad (A)$$

avant de passer aux applications, Donnons une nouvelle formule plus générale, qui permet de développer d'une manière semblable une fonction comme quelconque $q(z)$.

appliquant toujours la série de Mac-Laurin, on aura

$$q(z) = q(x) + \frac{y}{1} \left(\frac{d \cdot qz}{dy} \right)_{y=0} + \frac{y^2}{1.2} \left(\frac{d^2 \cdot qz}{dy^2} \right)_{y=0} + \dots$$

ou encore

$$\frac{d(qz)}{dy} = q'z \frac{dz}{dy}$$

et, en vertu de (2)

$$\frac{d \cdot qz}{dy} = q'z fz \frac{dz}{dx}$$

Maintenant, à cause de la formule générale (2), on peut poser $\psi z = q'z fz$, $\psi'z = q''z (fz)^2$, etc. on trouvera

$$\frac{d^2 \cdot qz}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(q'z fz \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d \left\{ q'z (fz)^2 \frac{dz}{dx} \right\}}{dx}$$

$$\frac{d^3 \cdot qz}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left\{ \frac{d \left[q'z (fz)^2 \frac{dz}{dx} \right]}{dx} \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d \left[q'z (fz)^3 \frac{dz}{dx} \right]}{dy} \right\} = \frac{d^2 \left\{ q'z (fz)^3 \frac{dz}{dx} \right\}}{dx^2}$$

et en général

$$\frac{d^n \cdot qz}{dy^n} = \frac{d^{n-1} \left[q'z (fz)^n \frac{dz}{dx} \right]}{dx^{n-1}}$$

et, en posant $y=0$, D'où $x=u$ et $\frac{dx}{du}=1$,

$$\left(\frac{d^n qz}{dy^n} \right)_{y=0} = \frac{d^{n-1} [q'u(fu)^n]}{du^{n-1}}$$

Repartant enfin, on aura

$$qz = qu + \frac{1}{1} q'u \cdot fu + \frac{1^2}{1.2} \frac{d[q'u(fu)^1]}{du} + \frac{1^3}{1.2.3} \frac{d^2[q'u(fu)^2]}{du^2} + \dots \quad (B)$$

Rem. Les formules (A) et (B) sont évidemment susceptibles de s'appliquer à des fonctions implicites de deux ou plusieurs variables indépendantes.

La formule (A) s'applique à la résolution des Equations tant algébriques que transcendentes, sous la condition qu'elle conduise à une série convergente.

Soit par exemple

$$z = x + k z^m$$

une Eq. D'où l'on veut tirer la valeur de z en x , ordonnée suivant les puissances de k . La formule (A) donnera

$$z = x + \frac{k}{1} x^m + \frac{k^2}{1.2} \cdot 2m x^{2m-1} + \frac{k^3}{1.2.3} \cdot 3m(2m-1) x^{3m-2} + \dots$$

et si l'on posait $q(z) = z^n$, on tirerait de la formule (B)

$$z^n = x^n + \frac{k}{1} n x^{m+n-1} + \frac{k^2}{1.2} n(2m+n-1) x^{2m+n-2} + \frac{k^3}{1.2.3} n(3m+n-1)(2m+n-2) x^{3m+n-3} + \dots$$

voir Lagrange (Equations).

Soit encore

$$z = x + e \sin z$$

qui est celle du Problème de Kepler.

La formule (A) donnera immédiatement

$$z = x + \frac{e}{1} \sin x + \frac{e^2}{1.2} \frac{d \sin x}{dx} + \frac{e^3}{1.2.3} \frac{d^2 \sin x}{dx^2} + \dots$$

Formule très-convergente, car e est très-petit.

Enfin, en astronomie et Physique Mathématique, on a besoin de développer

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}$$

suivant les puissances ascendantes de y . La série de Lagrange permet de le faire avec beaucoup d'élégance.

Posons en effet

$$\sqrt{1-2xy+y^2} = 1-yz \quad (1)$$

Donc

$$1-2xy+y^2 = 1+y^2z^2-2yz$$

$$z = x + \frac{1}{2}y(z^2-1)$$

Prenant $f(z) = \frac{1}{2}(z^2-1)$, on pourra développer z .

Maintenant, si l'on différencie (1) en x , on trouve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}$$

Donc, ce n'est que $\frac{dz}{dx}$, ou bien de z , qu'il faut avoir.

Or la série (A), différenciée, donne

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{y}{1} \frac{d(fx)}{dx} + \frac{y^2}{1.2} \frac{d^2(fx)^2}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3} \frac{d^3(fx)^3}{dx^3} + \dots$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = 1 + \frac{y}{1.2} \frac{d(x^2-1)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.2^2} \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} + \dots + \frac{y^n}{1.2 \dots n.2^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \dots$$

(Cournot).

Deux problèmes D. Maximum.

1^{er} Problème. — Un disque m , posé sur une table horizontale AB , est éclairé par une lampe P , dont le pied B est fixé à une distance invariable du disque m , mais que l'on peut hausser ou baisser suivant la verticale BP . On demande à quelle hauteur on peut la fixer pour que le disque m reçoive la plus grande clarté possible. — on regarde comme des quantités très-petites et négligeables les dimensions du disque et du foyer lumineux par rapport à la distance qui les sépare, et l'on sait d'ailleurs, par la théorie et l'expérience, que l'intensité de la lumière projetée par un point lumineux sur un élément de surface est en raison directe du sinus de l'angle que les rayons lumineux font avec la surface, et en raison inverse du carré de la distance de l'élément éclairé au point lumineux.

Soit a la distance invariable mB , et l'angle variable BmP , $f(x)$ la distance mP , $f(x)$ la l'intensité de la lumière projetée sur le disque, A l'intensité de la lumière qu'il recevrait sous l'incidence perpendiculaire des rayons et à une distance du foyer égale à l'unité linéaire: on aura

$$f(x) = \frac{A \sin x}{x^2} = \frac{A}{a^2} \sin x \cos^2 x$$

L'équation $f'(x) = 0$ devient dans ce cas

$$\cos^2 x - 2 \cos x \sin^2 x = 0$$

et se décompose en

$$\cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on a ensuite

$$f''(x) = \frac{A}{a^2} (9 \sin^2 x - 7) \sin x$$

La solution $\cos x = 0$ donne

$$f(x) = 0, \quad \sin x = \pm 1, \quad f''(x) = \pm \frac{2A}{a^2}$$

Les valeurs négatives de x ou de $\sin x$ donneraient pour $f(x)$ des valeurs négatives, et sont étrangères à la question telle qu'on l'a posée, bien qu'on puisse admettre par convention que les valeurs de $f(x)$ soient positives ou négatives selon que le disque sera éclairé par sa surface supérieure ou par sa surface inférieure. En écrivant donc les solutions négatives, on voit que la solution $\cos x = 0$ correspond à un minimum. Effectivement, il est manifeste que si l'on élève indéfiniment le foyer lumineux, l'intensité de la lumière projetée sur le disque s'affaiblit indéfiniment: donc il n'est point ici que d'un minimum mathématique, impossible à réaliser physiquement.

La solution

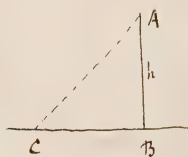
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

laquelle qui nous intéresse, donne

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{A}{a^2}, \quad f''(x) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{A}{a^2}$$

et correspond au maximum cherché.

2^e. Problème.



— Quand on veut mesurer la hauteur h d'une ligne verticale AB , on mesure à partir du pied de la verticale, une distance horizontale $BC = b$; on observe l'angle $BCA = x$, et l'on a

$$h = b \tan x$$

Cela posé, il s'agit de savoir quelle doit être la base arbitraire b , de manière qu'on forme le triangle le plus avantageux, c. à d. celui qui est tel qu'à une même erreur sur l'angle x corresponde l'erreur minimum sur la hauteur cherchée h .

Si, on lui d'observer exactement l'angle x , on observe un angle $x + \Delta x$ qui en diffère peu, la valeur qu'on en conclura pour la hauteur cherchée pourra s'exprimer par $h + \Delta h$, et l'on aura sensiblement:

$$\Delta h = \frac{d(b \operatorname{Tg} x)}{dx} \Delta x = \frac{b}{\cos^2 x} \Delta x$$

Donc, pour que le rapport de l'erreur Δh sur la valeur calculée, à l'erreur d'observation Δx , soit un minimum, il faut que la vraie valeur de l'angle x et celle de la base b qui en dépend rendent un minimum le facteur

$$\frac{b}{\cos^2 x}$$

c.à.d.

$$\frac{h}{\operatorname{Tg} x \cos^2 x}$$

Le problème revient donc à rendre un maximum la fonction

$$f(x) = \operatorname{Tg} x \cos^2 x = \sin x \cos x$$

or on a

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad f''(x) = -2 \sin x \cos x$$

Donc le maximum cherché correspond à

$$\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b = h$$

C'est la règle pratique que l'on découvre pour ainsi dire instinctivement, mais dont le calcul seul peut donner une démonstration rigoureuse.


La solution

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

n'aurait géométriquement aucun sens.

(Cournot)

Calcul Des Perturbations Des Planètes.
(Troisième).

E. Mauduit


73

Am. 19. 1870. (Am. 18)

Am. 19. 1870.

Am. 19. 1870.
Am. 19. 1870.

Des Perturbations Des Planètes.

Notre But est de Donner une Idée Rapide de la manière dont on calcule les perturbations qui éprouve le mouvement elliptique des Planètes par suite des actions mutuelles qu'elles exercent les unes sur les autres.

Comme on peut supposer que la masse de chaque planète est réunie tout entière en son centre de gravité, on voit que le problème se réduit à ceci :

La Loi de l'attraction en raison inverse du carré de la distance étant supposée vraie universellement, Déterminer le mouvement des différents points, de masses connues, qui circulent autour du Soleil, et s'attirent tous les uns les autres.

Les lois de ce mouvement se réduisent de l'intégration d'un système d'équations différentielles, après que l'évaluation directe a permis de déterminer les constantes introduites par l'intégration même.

Le problème est fort compliqué, mais il le serait bien davantage encore si, pour la double raison que les corps célestes sont sensiblement sphériques et qu'ils sont très-éloignés les uns des autres relativement à leurs dimensions respectives, on ne pouvait les supposer réduits à leurs centres de gravité, coïncidant sensiblement avec leurs centres de figure.

Soit M la masse du Soleil, soient m , m' , m'' ... les masses des diverses planètes. — Prenons

trois axes Rectangulaires quelconques, et appelons X, Y, Z les coordonnées du Soliel, ξ, η, ζ ; ξ', η', ζ' ; etc. celles des planètes $m, m',$ etc. — et supposons que sur les Satellites des planètes qui en possèdent leur soient Orbits, de sorte que nous en fassions abstraction complètement.

J'appelle f l'attraction que l'unité de masse exerce sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Je cherche d'abord les composantes de la force accélératrice à laquelle est soumis le Soliel M . — Soit pour

cela

$$\left\{ \begin{array}{l} Mm = r \\ Mm' = r' \\ Mm'' = r'' \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} mm' = f_{0,1} \\ mm'' = f_{0,2} \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} m'm = f_{1,0} \\ m'm'' = f_{1,2} \\ \text{etc.} \end{array} \right. \text{ etc.}$$

La force accélératrice qui s'exerce sur M , de la part de m , c'est $\frac{fMm}{r^2} \cdot \frac{1}{M}$ ou $\frac{fm}{r^2}$. — Sa composante suivant l'axe des x sera donc $\frac{fm(\xi - X)}{r^3}$. De même pour les autres axes et pour les autres planètes $m', m'',$ etc.

on aura donc, pour le Soliel,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{fm(\xi - X)}{r^3} + \frac{fm'(\xi' - X)}{r'^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{fM(\eta - Y)}{r^3} + \frac{fm'(\eta' - Y)}{r'^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{fM(\zeta - Z)}{r^3} + \frac{fm'(\zeta' - Z)}{r'^3} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Puis, de même, pour les autres planètes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{fM(\xi - X)}{r^3} + \frac{fm'(\xi' - \xi)}{f_{0,1}^3} + \frac{fm''(\xi'' - \xi)}{f_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \frac{fM(\eta - Y)}{r^3} + \frac{fm'(\eta' - \eta)}{f_{0,1}^3} + \frac{fm''(\eta'' - \eta)}{f_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = - \frac{fM(\zeta - Z)}{r^3} + \frac{fm'(\zeta' - \zeta)}{f_{0,1}^3} + \frac{fm''(\zeta'' - \zeta)}{f_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = - \frac{fM(\xi' - X)}{r'^3} + \frac{fm(\xi - \xi')}{f_{0,1}^3} + \frac{fm''(\xi'' - \xi')}{f_{1,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = - \text{etc.} \\ \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = - \text{etc.} \end{array} \right.$$

etc.

ainsi, on le voit, on a trois Equations pour chaque planète. - on pourra donc déterminer toutes les coordonnées en fonction du temps: - du moins on conçoit théoriquement la possibilité de cette détermination.

Mais, comme nous ne connaissons aucun point fixe dans l'espace auquel nous puissions rapporter le mouvement absolu du Soleil et des planètes, - ce ne sont point les mouvements absolus de ces corps qui est et est important de déterminer, mais bien leurs mouvements Relatifs par rapport à l'un d'eux, le Soleil par exemple, considéré comme un point immobile.

Imaginons donc par le centre du Soleil trois axes rectangulaires parallèles aux précédents, et appelons, par rapport à ces nouveaux axes, x, y, z , x', y', z' , x'', y'', z'' , etc. les coordonnées Respectives des diverses planètes m, m', m'' , etc. - on aura évidemment

$$\begin{array}{lll} \xi = X + x & \eta = Y + y & \zeta = Z + z \\ \xi' = X + x' & \eta' = Y + y' & \zeta' = Z + z' \\ \xi'' = X + x'' & \eta'' = Y + y'' & \zeta'' = Z + z'' \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

et il est clair que les distances Respectives des planètes s'expriment au moyen de ces nouvelles coordonnées relatives aux axes mobiles. - ainsi l'on a

$$\begin{array}{ll} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \rho_{0,1} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \\ r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} & \rho_{1,2} = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

nous conserverons cependant ces lettres r et ρ pour plus de commodité.

Cherchons ce que deviennent les Equations précédentes quand on y introduit les nouvelles coordonnées.

En faisant les substitutions, nous trouvons



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{f m x}{r^3} + \frac{f m' x'}{r'^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{f m y}{r^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{f m z}{r^3} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Pour le point m

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{f M x}{r^3} + \frac{f m' (x' - x)}{\int_{0,1}^3} + \frac{f m'' (x'' - x)}{\int_{0,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{f M y}{r^3} + \frac{f m' (y' - y)}{\int_{0,1}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} &= - \frac{f M z}{r^3} + \frac{f m' (z' - z)}{\int_{0,1}^3} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Pour le point m'

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt^2} &= - \frac{f M x'}{r'^3} + \frac{f m (x - x')}{\int_{0,1}^3} + \frac{f m'' (x'' - x')}{\int_{1,2}^3} + \text{etc.} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{d^2 y'}{dt^2} &= - \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

etc.

Il y a toujours autant d'Equations que d'inconnues.
Mais maintenant, comme nous ne cherchons pas les
coordonnées absolues x, y, z du Soleil, nous les éliminons
par des soustractions, et il nous reste

Pour le point m

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{f (M+m) x}{r^3} + f m' \left(\frac{x' - x}{\int_{0,1}^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) + \text{etc.} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{f (M+m) y}{r^3} + f m' \left(\frac{y' - y}{\int_{0,1}^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) + \text{etc.} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= - \frac{f (M+m) z}{r^3} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Pour le point m'

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= - \frac{f (M+m') x'}{r'^3} + f m \left(\frac{x - x'}{\int_{0,1}^3} - \frac{x}{r^3} \right) + \text{etc.} \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} &= - \text{etc.} \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} &= - \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

etc.

Ces Equations ne contiennent plus que les coordonnées relatives des différents points par rapport aux axes mobiles qui ont leur origine au centre du Soleil. — S'il y a n planètes, ces dernières Equations sont au nombre de $3n$.

Ce sont ces Equations qu'on se propose d'intégrer. Il n'y a pas pour cela de méthode générale. — on peut trouver Sept intégrales premières, mais, pour résoudre complètement le problème dans le cas général il faut avoir Recours à des méthodes d'approximation. — on se fonde pour cela sur ce que les masses des planètes sont extrêmement petites par rapport à la masse du Soleil (La masse de Jupiter, la plus grosse des planètes, n'est pas $\frac{1}{1000}$ de celle du Soleil). — Dans les seconds membres des Equations que nous avons à traiter, les premiers termes sont de beaucoup les plus considérables. on peut donc, dans une première approximation, négliger avec les autres termes en ne conservant que les premiers, et il vient

Pour le point m

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{f(M+m)x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{f(M+m)y}{r^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= - \frac{f(M+m)z}{r^3} \end{aligned} \right.$$

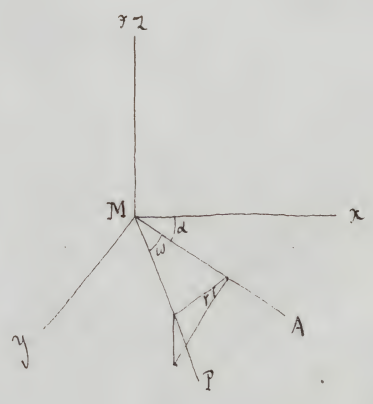
Pour le point m'

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= - \frac{f(M+m')x'}{r'^3} \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} &= - \frac{f(M+m')y'}{r'^3} \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} &= - \frac{f(M+m')z'}{r'^3} \end{aligned} \right.$$

etc.

alors le problème est extrêmement simplifié. — Car, Dans le cas Général, chaque Système De trois Equations contenait en même temps les coordonnées De toutes les planètes. Mais maintenant, les 3 premières Equations ne contiennent que les coordonnées De la planète m , les 3 suivantes que celles de la planète m' , et ainsi De suite. En d'autres termes, ce sont les Equations qu'on obtiendrait en prouvant chaque planète en ne faisant attention qu'à l'attraction qui s'exerce entre elle et le Soleil, et négligeant complètement les actions mutuelles De diverses planètes les unes sur les autres, De façon qu'on pourra déterminer & séparément le mouvement De chacune D'elles. — En effet, nous savons interpréter pour exemple les trois premières Equations. Ce sont celles du mouvement absolu D'un point de masse $M+m$, attiré par un centre fixe en raison inverse Du carré De la distance. Il est facile De trouver x, y, z en fonction Du temps t . Nous savons que ce mouvement se fait dans un plan, qu'il est elliptique, et que les aires décrites par le rayon vecteur Du point m sont proportionnelles au temps.

Nous ne ferons pas le calcul: il est partout. Indiquons seulement les résultats. — Le Soleil M étant l'origine Des coordonnées, on prend pour plan Des x, y le plan De l'elliptique. — Soit MA la trace sur le plan xy Du plan De l'ellipse décrite par la planète m . Soit \angle l'angle AMX compté Dans le sens que l'on suit quand on marche Des x positives vers les y positives. On sait que le plan De l'ellipse diffère peu De celui De l'elliptique, avec lequel les plans Des orbites planétaires font tous Des angles très-petits. Soit γ cet angle pour la planète m , l'angle Du plan qu'elle décrit, avec le plan Des xy . — on sait aussi que toutes les planètes se meuvent dans le même sens. — Enfin MA est dirigé Dans le sens Du mouvement ascendant De l'orbite De



Si l'on négligeait λ , on trouverait pour α , γ , ω , α , ϵ , ϵ des valeurs constantes : et l'on retournerait aux Equations du mouvement elliptique des planètes. — or ce n'est pas notre but. — Mais remarquons que, puisque les dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, ... sont extrêmement petites, il suit qu'à une époque quelconque ces quantités α , γ , ... elles-mêmes diffèrent très-peu de leurs valeurs initiales. Si donc α_0 , γ_0 , ω_0 , ... sont ces valeurs initiales à une époque donnée prise pour origine du temps, leurs valeurs à une époque quelconque en seront très-peu différentes, et nous pourrions poser

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \lambda \alpha_1 \\ \gamma = \gamma_0 + \lambda \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha' = \alpha'_0 + \lambda \alpha'_1 \\ \gamma' = \gamma'_0 + \lambda \gamma'_1 \\ \vdots \end{cases}$$

etc.

α_0 , γ_0 , ... α'_0 , γ'_0 , ... étant données par observation, et α_1 , γ_1 , ... α'_1 , γ'_1 , ... étant de nouvelles quantités inconnues à déterminer en fonction du temps.

Je substitue maintenant ces valeurs dans P , Q , ... alors, P deviendra $p_0 + \lambda P_1$, p_0 désignant ce qu'on obtiendrait en substituant dans P , α_0 , γ_0 , ... à α , γ , ... et λP_1 étant une forme sous laquelle on peut mettre évidemment l'ensemble des autres termes. — De même $Q = q_0 + \lambda Q_1$, etc.

Les Equations à intégrer deviennent alors

$$\lambda \frac{d\alpha_1}{dt} = \lambda p_0 + \lambda^2 P_1$$

ou

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = p_0 + \lambda P_1 \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = q_0 + \lambda Q_1 \\ \vdots \end{cases}$$

et de même pour les autres planètes. —

à présent, x , y , etc. sont aisés à donner par approximation. Car, dans les dernières équations, on peut, aux seconds membres, négliger les derniers des-
mes, et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \int_0^t p_0 dt \\ y_1 = \int_0^t q_0 dt \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

par de simples quadratures.

Vaut-il une approximation plus grande ? — on pourra

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \int_0^t p_0 dt + \lambda x_2 \\ y_1 = \int_0^t q_0 dt + \lambda y_2 \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Je substitue ces valeurs dans P , Q , ... Le Résultat de la substitution se compose de deux parties : celle qu'on obtiendrait en remplaçant x , y , ... par $\int_0^t p_0 dt$, $\int_0^t q_0 dt$... seulement ; et une autre de l'ordre de λ . Je pose

$$\begin{aligned} P_1 &= p_0 + \lambda P_2 \\ Q_1 &= q_0 + \lambda Q_2 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs et celles exactes de x , y , ...

dans les équations à intégrer prises sous leur dernière forme, elles deviendront

$$\frac{dx_1}{dt} \text{ ou } p_0 + \lambda \frac{dx_2}{dt} = p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2$$

ou bien

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_2}{dt} = p_1 + \lambda p_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = q_1 + \lambda q_2 \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Si on néglige les derniers termes des seconds membres, ces équations donnent

x, y et z en fonction de t . - Ces t valeurs ne peuvent il est vrai s'écrire explicitement. Mais cela ne fait absolument rien : on n'en pourra pas moins pour chaque valeur de t , calculer x, y et z avec autant d'approximation que l'on voudra. Nous avons donc bien réellement x, y et z en fonction de t et de six constantes introduites par l'intégration et déterminées par l'expérience, qui sont

$$\alpha, \gamma, \omega, a, e, c.$$

Pour une autre planète on aura de même x', y' et z' en fonction de t et de six nouvelles constantes

$$\alpha', \gamma', \omega', a', e', c'.$$

et ainsi de suite.

Nous allons maintenant chercher la solution du problème si l'on négligeait les actions mutuelles des planètes les unes sur les autres. Comme alors le mouvement de chacune d'elles serait rigoureusement ^{suivant} une ellipse, les six constantes $\alpha, \gamma, \omega, a, e, c$ sont appelées les éléments du mouvement elliptique des planètes.

Cherchons maintenant à déterminer le mouvement des planètes avec plus d'exactitude.

Pour cela, supposons x, y et z toujours exprimées par les mêmes formules que dans le mouvement elliptique mais seulement regardons $\alpha, \gamma, \omega, a, e, c$ non plus comme des constantes, mais comme des fonctions du temps inconnues et que nous allons tâcher de trouver. Il est bien clair que cette hypothèse nous est toujours permise. Car une expression telle que celle-ci

$\varphi(t, \alpha, \gamma, \omega, a, e, c)$, où les quantités α, γ, \dots sont des fonctions arbitraires du temps, peut être identifiée à une fonction donnée du temps quelle qu'elle soit.

et cela, d'une infinité de manières. — la question que nous nous proposons est donc complètement indéterminée. Car, pour que l'identification soit mise par nous tout-à-l'heure fût possible, il suffirait qu'une seule des constantes fût fonction arbitraire du temps, et alors, par cette identification même, on déterminerait complètement cette fonction. — or, au lieu d'une fonction arbitraire du temps, nous nous en donnons six, qui entrent dans trois Equations: c'est donc trois de temps pour chaque planète. En d'autres termes, nous nous donnons 6 inconnues, et il n'y a pour les déterminer que 3 Equations. —

Nous pourrions donc profiter de cette indétermination du problème, et faire en sorte que les trois valeurs de x , y et z conservent la même forme qu'elles avaient quand a , γ .. étaient de simples constantes. Quelles sont les Equations de condition, que nous pourrions nous donner au nombre de 3, que nous pourrions poser cela? — Soit

$$x = F(t, a, \gamma, w, a, e, c)$$

Quand les quantités a , γ .. sont des constantes, $\frac{dx}{dt}$ est égal simplement à $\frac{dF}{dt}$. — Mais, maintenant que nous les considérons comme des fonctions du temps, alors nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dt} + \frac{dF}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \dots + \frac{dF}{dc} \frac{dc}{dt}$$

Si nous voulons que x conserve, en fonction du temps, la même forme qu'il avait tout-à-l'heure, il faut que sa dérivée par rapport à t conserve aussi une forme identique: cela est assez évident. — Il nous faut donc, en raisonnant de même pour y et z , poser les Equations de condition

$$2. \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{dx}{dc} \frac{dc}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dt} + \dots + \frac{dy}{dc} \frac{dc}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dz} \frac{dz}{dt} + \dots + \frac{dz}{dc} \frac{dc}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

etc.

équations qui sont bien au nombre de 3i. - Le problème devient alors déterminé. -

Voilà maintenant ce que deviendront les trois équations exactes du mouvement pour la planète m quand on y portera toutes ces conditions. - Puisque

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2F}{dt^2} + \frac{d^2F}{dzdt} \cdot \frac{dz}{dt} + \dots + \frac{d^2F}{dc dt} \frac{dc}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2F_1}{dt^2} + \text{etc.} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2F_2}{dt^2} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Remarquons en outre que, puisque $x = F(t, z, \dots)$ dans le mouvement elliptique, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2F}{dt^2} = - \frac{f(M+m)x}{r^3} \\ \frac{d^2F_1}{dt^2} = - \frac{f(M+m)y}{r^3} \\ \frac{d^2F_2}{dt^2} = - \frac{f(M+m)z}{r^3} \end{array} \right.$$

Par la substitution de ces valeurs, les équations exactes pour la planète m deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dzdt} \frac{dz}{dt} + \frac{d^2x}{dydt} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{d^2x}{dc dt} \frac{dc}{dt} = A'm' + A''m'' + \text{etc.} \\ \frac{d^2y}{dzdt} \frac{dz}{dt} + \frac{d^2y}{dydt} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{d^2y}{dc dt} \frac{dc}{dt} = B'm' + B''m'' + \text{etc.} \\ \frac{d^2z}{dzdt} \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dydt} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{d^2z}{dc dt} \frac{dc}{dt} = C'm' + C''m'' + \text{etc.} \end{array} \right.$$

En trois équations, jointes aux trois autres qui sont écrites en haut de cette même page, me donnent

Si les Equations entre les six nouvelles variables α, γ, \dots, c .
 Dans ces Equations, les quantités analogues à $\frac{dx}{dt}$ et
 à $\frac{d^2x}{dt^2}$ sont connues, puisque x est supposé connu
 la même forme que dans le mouvement Elliptique. — Ces
 six Equations ne contiennent donc réellement que les six
 Dérivées du 1^{er} ordre $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \dots, \frac{dc}{dt}$, au premier degré,
 et ne le multipliant pas entre elles, puis α, γ, \dots, c d'une
 manière quelconque, enfin le temps t . — on pourra
 donc résoudre les six Equations par rapport à ces
 six Dérivées premières, et l'on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} = H' m' + H'' m'' + \text{etc.} \\ \frac{d\gamma}{dt} = K' m' + K'' m'' + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

$H', H'', \dots, K', K'', \dots$ contenant $t, \alpha, \gamma, \omega, a, e, c$.

Pour rendre les raisonnements plus faciles, je remarque
 que les masses m', m'' ... des planètes sont très-petites, si
 on les rapporte à la masse du Soleil. Si donc on dé-
 signe par λ une quantité de même ordre que ces masses
 m, m', \dots , et égale à $\frac{1}{1000}$ environ, les Equations précé-
 dentes pourront s'écrire ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} = \lambda P \\ \frac{d\gamma}{dt} = \lambda Q \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

P, Q, \dots étant des quantités finies, fonctions de $t, \alpha, \gamma, \dots, c$. — Et nous aurons ainsi six Equations
 pour chaque planète, donc en tout autant d'Equations
 que d'inconnues. — Toutes ces Equations doivent
 être prises toutes ensemble, et non pas six par six
 par systèmes séparés.

Maintenant, ces Equations sont faciles à intégrer
 par approximation. — Voici comment.

$$\begin{cases} \alpha_2 = \int_0^t p_1 dt \\ \gamma_2 = \int_0^t q_1 dt \\ \text{etc.} \end{cases}$$

et ainsi de suite, aussi loin qu'on le voudra.

En réunissant ces Résultats, on trouvera donc

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \lambda \int_0^t p_0 dt + \lambda^2 \int_0^t p_1 dt + \lambda^3 \int_0^t p_2 dt + \text{etc.} \\ \gamma = \gamma_0 + \lambda \int_0^t q_0 dt + \lambda^2 \int_0^t q_1 dt + \lambda^3 \int_0^t q_2 dt + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$p_0, p_1, p_2, \dots, q_0, q_1, q_2, \dots$ étant des fonctions du temps et des valeurs initiales des constantes, — on aura donc α, γ, \dots avec autant d'approximation que l'on voudra. — On verra en passant, à une époque quelconque calculer les coordonnées d'une planète avec toute l'exactitude que l'on désirera.

Le procédé que nous venons d'exposer est entièrement général, et peut servir à intégrer par approximation un système quelconque d'équations simultanées si l'on a d'jà un système de valeurs approchées des inconnues.

Rem. — à chaque instant, on peut regarder la planète ou comme se trouvant sur une certaine ellipse, qui change de place avec le temps. — Mais, comme les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ restent les mêmes dans les mouvement. elliptique, quand α, γ, \dots sont fonction du temps et quand elles sont constantes, il s'ensuit que la tangente à la courbe réellement décrite coïncide toujours avec la tangente

612
En un même point à l'ellipse sur laquelle la planète
peut être supposée se mouvoir à ce même instant.

Ces deux courbes sont donc perpétuellement tangentes:
la courbe du mouvement réel est l'enveloppe des
positions de l'ellipse mobile.

la planète m. — au périhélie de la planète m, son rayon vecteur forme avec la ligne OA un angle que j'appelle ω , et dont la valeur détermine le grand axe de l'ellipse de la planète. — Soit c le temps où la planète passe au périhélie. — Soient ces quantités, a, p, ω, c , ainsi que le demi-grand-axe a et l'excentricité e , étant supposées données par l'observation, on peut, par l'intégration des équations différentielles, arriver à des équations finies qui déterminent complètement et sans ambiguïté aucune le mouvement de la planète. — Ces équations sont, si l'on appelle r le rayon vecteur de la planète, et un angle tel qu'on ait $r = a(1 - e \cos u)$, et n un coefficient égal à $\sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}}$, — sont les suivantes

$$r = a(1 - e \cos u)$$

$$n(t - c) = u - e \sin u$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v - \omega)}$$

v étant l'angle que fait à chaque instant, avec OA le rayon vecteur de la planète.

D'après cela, il est alors facile d'arriver à y et z en fonction du temps. — Pour cela, il faut exprimer ces coordonnées x, y et z en fonction de r et de v et de ces quantités connues a, p, ω, c, a et e . — Cela est aisé. — Soit H une position quelconque de la planète. Du point H j'abaisse une perpendiculaire HK sur le plan des xy . Du pied K de cette perpendiculaire, j'abaisse, dans le plan des xy , une autre perpendiculaire KI sur l'axe ox . Du même point K, dans le plan des xy , j'abaisse aussi une perpendiculaire KI sur la direction MA du merid ascendant de la planète. — Si je joins HI,

674

$$\begin{cases} x = MR - LR = MR - IS \\ y = KL = IR + KS \\ z = HK \end{cases}$$

$$MI = MH: G_M HMI$$

$$= r \cos v$$

$$\text{H I} = r \sin v$$
$$M_R = M_I \cos 2$$

$$= r \cos v \cos \alpha$$

$$I_R = r \cos v \sin \alpha$$

$$KI = HI \cos \gamma$$

$$= r \sin v \cos \gamma$$

$$HK = r \sin \nu \sin \gamma$$

$$I_S = I_K \cos \theta \quad I_K = I_S \sin \theta$$

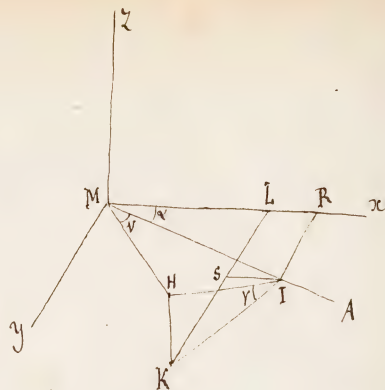
$$= r \sin \nu \cos \gamma \sin \alpha$$

$$KS = r \sin \nu \cos \gamma \cos \alpha$$

Reportant toutes ces valeurs dans les expressions de x , y et z , on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos v \cos \alpha - r \sin v \cos \gamma \sin \alpha \\ y = r \cos v \sin \alpha + r \sin v \cos \gamma \cos \alpha \\ z = r \sin v \sin \gamma \end{array} \right.$$

on a donc x, y, z en fonction de r et de v , et de quantités connues. D'ailleurs on a r et v en fonction de t par élimination de u dans les trois équations précédentes. — Donc on peut avoir



Mouvement d'un corps solide entièrement libre dans l'espace . -

Nous commencerons par quelques principes sur le déplacement en lui-même d'un corps solide quelconque, indépendamment des forces qui le sollicitent. Ce sont en réalité quelques théorèmes de simple géométrie que nous allons établir préalablement.

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui du mouvement d'une figure plane dans son plan.

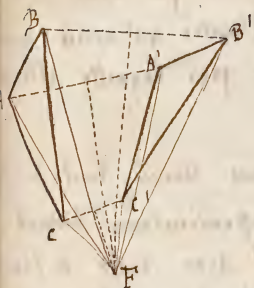
Le théorème.

Étant données deux positions quelconques d'une même figure plane dans son plan, on peut toujours l'amener de la première position à la seconde en la faisant tourner autour d'un certain point du plan.

Prenez pour exemple un triangle. - Soient $ABC, A'B'C'$ deux de ses positions. Joignons AA' et au milieu tirons-lui une perpendiculaire. De même joignons BB' et Ces deux perpendiculaires se coupent en un point F . Je dis que le triangle ABC peut être amené à coïncider avec $A'B'C'$ par une simple rotation autour du point F .

En effet, joignons FA, FB, FA', FB' . Nous formerons deux triangles FAC et $FA'C'$ qui, il est aisé de le voir, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux. - Donc les angles en A et en A' de ces triangles sont égaux. Donc les angles CAT et $C'A'T$ sont aussi égaux. Donc, si je joins FC et FC' , j'aurai deux triangles FCA et $FC'A'$ aussi égaux comme ayant un angle égal $A = A'$ compris entre côtés égaux.

D'après cela, on voit ce qui aura lieu si le triangle ABC tourne autour du point F . Quand il aura tourné de façon que AB s'applique sur $A'B'$, le point C viendra de lui-même en C' , et



les deux figures coïncideront.

Si au lieu d'un triangle on avait un quadrilatère, le quatrième sommet viendrait également en D, et ainsi de suite.

ainsi, tout donne deux positions quelconques d'une même figure plane dans son plan, on peut toujours passer de la première à la seconde par une simple rotation autour d'un certain point, et, pour avoir ce point, il suffit de joindre deux couples de points homologues des deux positions, et de prendre le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur les milieux des deux droites de jonction ainsi obtenues.

on déduit de là cette propriété :

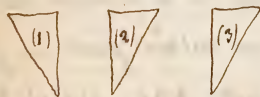
Le théorème.

Si deux figures dans un plan sont directement égales, les perpendiculaires élevées au milieu des droites qui joignent les couples de points homologues des deux figures, vont toutes converger en un même point du plan.

Remarque. — J'ai dit « deux figures directement égales » et non pas simplement « deux figures égales ». c'est qu'en effet il y a deux espèces d'égalités : 1°. l'égalité directe, celle de deux figures dont l'une peut être amenée à coïncider avec l'autre par un simple mouvement dans le plan ; 2°. l'égalité inverse, celle de deux figures qui dont l'une ne peut être ramenée à coïncider avec l'autre qu'après avoir subi un retournement qui change la face par laquelle elle est appliquée sur le plan.

Dans l'énoncé général que nous avons donné tout-à-l'heure, il pourrait se faire que toutes les perpendiculaires fussent parallèles entre elles, auquel cas le point F s'en irait à l'infini. Mais alors les droites AA' , BB' , CC' etc. seraient parallèles et l'une des figures pourrait être amenée sur l'autre par un simple mouvement de translation.

Il suit de là que tout déplacement infiniment petit d'une figure dans son plan peut être regardé comme effectué par une rotation de la figure autour d'un certain point de ce même plan. — En effet, la figure ABC passant en $A'B'C'$, dans



(2) et (3), Égalité Directe

(1) et (2), Égalité Inverse

ses points dérivent de petits arcs quelconques AA' , BB' , CC' , ...
 Mais nous venons de démontrer que la figure peut passer de la
 première position à la seconde par une rotation autour d'un point
 F convenablement déterminé. Les arcs de cercles que dérivent les
 points A , B , C , ... pendant cette rotation infiniment petite, ne
 diffèrent que par des infiniment petits du second ordre des arcs
 qu'ils dérivent réellement, et l'on peut par conséquent considérer
 le mouvement réel avec une rotation autour du point F . — Mais
 ce point F change de place continuellement, et n'est centre de rota-
 tion que pendant un temps infiniment petit. C'est lui qu'on appelle
 le Centre Instantané de Rotation.

Passons maintenant à quelques propositions relatives aux
 rotations successives infiniment petites d'un corps solide quelconque
 autour de divers axes parallèles entre eux. — J'entends par rota-
 tions infiniment petites d'un corps autour d'un axe un mouvement
 de rotation autour de cet axe faisant tourner le corps d'une
 quantité angulaire infiniment petite.

Théorème.

Si un corps subit deux rotations successives infiniment petites
 autour de deux axes parallèles, ces deux rotations peuvent être
 remplacées par une seule autour d'un axe parallèle aux deux
 premiers, et la position de ce nouvel axe et la grandeur de la
 rotation se déterminent comme le point d'application et la gran-
 deur de la résultante de deux forces parallèles.

ainsi : supposons que le corps ait tourné autour du premier axe
 d'un angle infiniment petit α , autour du second, d'un angle β :
 je dis que ces deux mouvements équivalent à une rotation unique
 autour d'un troisième axe parallèle aux deux premiers, que la
 grandeur de cette rotation est $\alpha + \beta$ si les deux rotations primitives
 sont de même sens, et que de plus si, sur les directions des deux
 premiers axes, on porte des longueurs proportionnelles à α et à β
 considérées comme des forces, qu'on cherche la résultante de ces
 forces, le point d'application de cette résultante sera un point par
 où passera l'axe de la rotation résultante.

ainsi le point G divise AC en deux parties réciproquement proportionnelles à a et à β , ce qui démontre bien le théorème.

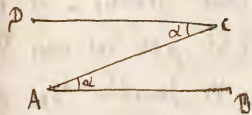
J'ai supposé que les deux rotations α et β étaient de même sens. Elles peuvent être de sens contraires : c'est absolument la même chose.

On passe de là à la composition d'un nombre quelconque de rotations autour infiniment petites autour d'axes parallèles. — Il est inutile de répéter et énoncé du théorème dans ce cas général.

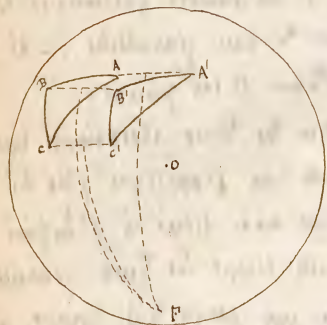
Il y a à examiner le cas particulier de deux rotations égales et de sens contraires. La règle précédente ne s'applique plus ici : elle donnerait une rotation nulle autour d'un axe situé à l'infini. Il faut donc examiner à part quel point peut être l'effet de deux pareilles rotations successives. — Supposons donc un corps qui tourne successivement et en sens contraires d'un même angle α autour de deux axes A et B . alors A arrive en D et B en C . Le corps n'a fait évidemment que se déplacer parallèlement à lui-même. Ainsi l'action de deux rotations égales et de sens contraires sur l'un de deux axes parallèles, action que l'on peut appeler un Couple de Rotation, se réduit à une translation du corps sur lequel elle agit. — Reste à voir quelles sont, à la limite, la direction et la grandeur de cette translation. — Or, à la limite, CB devient perpendiculaire à AB . Donc la direction de cette translation est perpendiculaire au plan des deux axes parallèles. — Donc un couple de rotation produit une translation perpendiculaire à son plan, en appelant plan du couple de rotation le plan des deux axes parallèles autour desquels se font les deux rotations. — De plus, pour la grandeur de cette translation, on a évidemment $CB = a\alpha$. Ce produit $a\alpha$ peut être désigné, pour le mot de moment du couple de rotation. Donc le moment d'un couple de rotation est égal à son angle multiplié par la distance de ses deux axes parallèles.

À présent, on peut établir une théorie toute semblable pour les déplacements d'un corps solide quelconque mobile autour d'un point fixe.

Soit O le point fixe autour duquel se meut le corps solide.



$$AB = a$$



Je dis que ce corps peut être amené d'une quelconque de ses positions à une seconde non moins quelconque par une rotation autour d'un certain axe passant par le point O . — En effet du point O , comme centre avec un rayon quelconque je d'iris Surface sphérique, sur laquelle je prends au hasard trois points que je considère comme liés invariablement au corps. — Je suppose que, dans une seconde position de ce corps, A vienne en A' , B en B' et C en C' . Je dis que le corps peut être amené de la première position à la seconde par une rotation autour d'un axe passant par le point O . — Pour le démontrer, il suffit de prouver que le triangle sphérique ABC peut être amené à coïncider avec le triangle sphérique $A'B'C'$ par une rotation autour d'un point de la sphère dont ils sont parties. Et ce point se détermine en joignant AA' et BB' par des arcs de grands cercles, élevant au milieu des arcs de jonction des arcs de grands cercles perpendiculaires, et prenant l'intersection de ces deux axes. — Il n'y a pas un mot à changer à la démonstration pour les figures planes. — considérons donc ce point comme démontré. — Le point F ainsi déterminé, il est clair que la droite FO sera l'axe autour duquel, par une simple rotation, le corps passerait de la première à la seconde de ses positions.

Donc, quand un corps se meut autour d'un point fixe d'une manière quelconque, un de ses déplacements infiniment petits peut être regardé comme coïncidant avec une rotation autour d'un axe passant par le point fixe, axe que l'on appelle axe instantané de rotation.

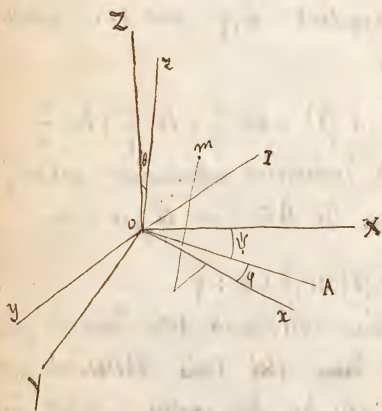
Le théorème.

Si l'on fait subir à un corps deux rotations successives infiniment petites autour de deux axes passant par un point fixe O , le déplacement qui en résultera pourra être produit par une seule rotation autour d'un axe qui passera par le même point, et la direction de cet axe et la grandeur de la rotation Résultante s'obtiennent comme la direction et l'intensité

Proprement, une rotation quelconque infiniment petite peut être décomposée en plusieurs autres rotations infiniment petites autour d'un axe passant par un même point de l'axe de la rotation primitive.

En particulier, on pourra toujours décomposer une rotation infinitésimale en trois autres autour de trois axes rectangulaires passant par un même point de l'axe de cette rotation, et alors, si ω est cette rotation primitive, et si α , β et γ sont les angles que fait son axe avec les trois axes rectangulaires, ces trois rotations composantes seront $\omega \cos \alpha$, $\omega \cos \beta$ et $\omega \cos \gamma$.

Ces principes étant posés, nous pouvons facilement trouver les équations du mouvement d'un corps solide quelconque autour d'un point fixe : — et si ensuite on détermine le mouvement de translation de ce point, on connaîtra complètement le mouvement d'un corps solide entièrement libre dans l'espace. —



Soient OX , OY , OZ trois axes rectangulaires fixes passant par le point fixe O . — Imaginons trois autres axes OX' , OY' et OZ' rectangulaires aussi et passant par le point O , et mais liés invariablement au corps et emportés par lui dans son mouvement de rotation. Il est clair que les coordonnées d'un point quelconque du corps par rapport à ces nouveaux axes sont fixes. Soient x , y , z les coordonnées d'un point m quelconque par rapport à ces axes mobiles. — Le déplacement infiniment petit du corps pendant le temps dt peut être regardé comme une rotation autour d'un certain axe passant par le point O , à des infinim. petites du second ordre près. Soit OI cet axe instantané de rotation pour l'époque. Le déplacement inf. petit du corps dans le temps dt consiste donc dans une rotation autour de OI . J'appelle ωdt l'angle infiniment petit de cette rotation : ω est la vitesse de cette rotation, prise à l'unité de temps. — cette rotation peut se décomposer en trois autres suivant les trois axes OX' , OY' et OZ' . Je représente les trois composantes par

$$p dt \quad q dt \quad r dt$$

(p , q , r , étant les produits de ω par les cosinus des angles que fa

Place instantanément OI avec les axes ox, oy, oz).

D'autre part, la position des axes mobiles par rapport aux axes fixes pourra être à chaque instant déterminée par la connaissance de trois angles qui seront les suivants : — Soit ψ l'angle du plan xoy sur XOY . J'appelle ψ l'angle xOA

" φ " xOA

" θ " Zox

Le dernier angle θ étant aussi l'angle dièdre des deux plans xoy et XOY .

Cela posé, pour trouver les Equations du mouvement du corps autour du point O , il me suffit de trouver trois Relations entre le temps et les angles ψ, φ et θ . — ce n'est pas ainsi que je vais opérer. Je vais considérer les quantités p, q et r comme des inconnues auxiliaires, utiles pour la commodité des calculs, et je vais chercher trois Equations entre le temps et les six quantités $\psi, \varphi, \theta, p, q, r$. — Puis, j'établirai par des considérations géométriques trois autres Relations entre ces six quantités. —

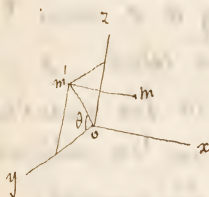
occupons-nous d'abord de la recherche des trois premières Equations, comme si les quantités p, q, r étaient connues. —

à chaque instant, il y a Equilibre entre les forces réellement appliquées au corps et celles qui, prises en sens contraires, donneraient à chaque point supposé libre le mouvement qu'il a réellement. — Je vais exprimer cet Equilibre par des Equations. — Or, le corps est mobile autour du point O . — Donc, pour l'Equilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui se font Equilibre soit nulle par rapport à trois axes rectangulaires passant par le point O . — Je vais exprimer que ces moments sont nuls par rapport aux trois axes mobiles ox, oy, oz , dont la mobilité nous est pour cela parfaitement indifférente.

Ce qu'il m'importe d'avoir d'abord, ce sont les moments des forces effectives par rapport aux axes mobiles, et pour cela, il faut d'abord avoir leurs composantes suivant ces axes. — Puis avoir la composante suivant ox de la force effective du point m à l'époque quelconque t , je chercherai quelle est sa vitesse

parallèle à ox à l'époque t , sa vitesse parallèle à ox à l'époque $t+dt$, je prendrai la différence, et je la diviserai par dt : j'aurai ainsi la composante suivant ox de la force accélératrice du point m : — cela résulte de ce que cette composante est en général $\frac{d^2x}{dt^2}$ ou $\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}$. — Il faut apporter une certaine attention à ce calcul, attendu que les axes ox , oy , oz sont mobiles.

Considérons donc les axes ox , oy , oz comme fixes pendant le temps dt , et cherchons quelles sont les variations que subissent les coordonnées x , y , z par le déplacement infiniment petit du corps. — ce déplacement, nous l'avons dit, peut être remplacé par les trois rotations pdt , qdt , rdt autour des axes ox , oy , oz . Prenons d'abord la première rotation pdt autour de ox . Que deviennent par cette rotation x , y et z ? D'abord, x ne change pas. — Ensuite : j'appelle pour un moment θ l'angle $m'oy$, et ρ la distance om' : $\rho\theta$ sera égal à pdt . — J'aurai



$$y = \rho \cos \theta$$

$$z = \rho \sin \theta$$

d'où

$$\delta y = -\rho \sin \theta \delta \theta = -\rho z dt$$

$$\delta z = \rho \cos \theta \delta \theta = \rho y dt$$

ainsi, par la rotation infiniment petite pdt autour de ox , j'ai pour les accroissements des coordonnées,

$$\begin{cases} \delta x = 0 \\ \delta y = -\rho z dt \\ \delta z = \rho y dt \end{cases}$$

Pour les signes, il y a à observer que p sera positif comme positif lorsque le corps aura tourné de y vers z ; q sera de même positif quand le corps aura tourné de z vers x ; r enfin sera positif quand le corps aura tourné de x vers y . — Maintenant, si le corps tourne autour de oy de la quantité qdt , j'aurai pour les accroissements correspondants des coordonnées les expressions suivantes (obtenues en remplaçant dans les précédentes chaque lettre p , x , y , z par la suivante)

$$\begin{cases} \delta_2 x = qz dt \\ \delta_2 y = 0 \\ \delta_2 z = -qx dt \end{cases}$$

observation : - le corps avait déjà tourné autour de oz avant de tourner autour de oy , de sorte que x , y et z avaient changé par la de quantités infiniment petites : et il est clair que cela n'altère que d'infiniment petits du second ordre les variations $\delta_2 x$, $\delta_2 y$ et $\delta_2 z$. -

J'aurai enfin pour la troisième rotation

$$\begin{cases} \delta_3 x = -ry dt \\ \delta_3 y = rx dt \\ \delta_3 z = 0 \end{cases}$$

J'aurai donc pour les variations totales des coordonnées

$$\begin{cases} \delta x = (qz - ry) dt \\ \delta y = (rx - pz) dt \\ \delta z = (py - qx) dt \end{cases}$$

ayant ainsi les déplacements du point m parallèlement aux trois axes, en divisant par dt , j'aurai les composantes de la vitesse suivant ces trois axes, à l'époque t . Si u , v et w désignent ces composantes, j'aurai

$$\begin{cases} u = qz - ry \\ v = rx - pz \\ w = py - qx \end{cases}$$

Maintenant, on pourroit croire au premier abord que $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ sont les composantes de la force accélératrice du point m . on se tromperoit étrangement. Car u est la composante de la vitesse de m parallèle à ox à l'époque t ; $u + du$ est la composante de la vitesse de m parallèle à la nouvelle position de ox à l'époque $t + dt$. La différence du est donc la différence de ces composantes qui n'ont pas même direction, ce n'est donc pas l'accroissement de la vitesse parallèle à ox : et $\frac{du}{dt}$ n'est pas la composante suivant ox de la force accélératrice du point m . - Mais il est

facile de l'avoir. — En effet, à l'époque $t+dt$, ox , oy et oz sont devenus ox_1 , oy_1 et oz_1 ; u , v , w sont les composantes de la vitesse à l'époque t suivant ox , oy et oz ; $u+du$, $v+dv$, $w+dw$ sont ses composantes à l'époque $t+dt$ suivant ox , oy et oz . Comment avoir à l'époque $t+dt$ les composantes de la vitesse suivant ox_1 , oy_1 et oz_1 ? — Cela est facile. — Ces composantes, on le sait, et d'ailleurs cela se voit presque immédiatement, sont

$$\begin{cases} (u+du) \cos(x, x_1) + (v+dv) \cos(y, x_1) + (w+dw) \cos(z, x_1) & \text{pour } ox_1 \\ (u+du) \cos(x, y_1) + (v+dv) \cos(y, y_1) + (w+dw) \cos(z, y_1) & \text{'' } oy_1 \\ (u+du) \cos(x, z_1) + (v+dv) \cos(y, z_1) + (w+dw) \cos(z, z_1) & \text{'' } oz_1 \end{cases}$$

Orde à trouver ces neuf cosinus. — Pour cela, je prends sur ox une distance $OK=1$. — Les coordonnées du point K sont $x=1$, $y=0$, $z=0$. Au bout du temps dt , le point K est venu en K_1 sur ox_1 et l'on a toujours $OK_1=1$. Les coordonnées de K_1 , par rapport à ox , oy , oz seront les projections de K_1 sur ces axes dont l'une toujours égale à l'unité sans compte sur ox : donc ces coordonnées seront les cosinus des angles x, x_1 , y, x_1 , z, x_1 . — Or ces coordonnées s'obtiennent facilement. — Car en général on a

$$\begin{cases} \delta x = (qz - ry) dt \\ \delta y = (rx - pz) dt \\ \delta z = (py - qx) dt \end{cases}$$

ici nous aurons donc, puisque $x=1$, $y=0$, $z=0$,

$$\begin{cases} \delta x = 0 \\ \delta y = r dt \\ \delta z = -q dt \end{cases}$$

et par conséquent les coordonnées $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ou les trois cosinus dont nous venons de parler, seront

$$\begin{cases} \cos x, x_1 = 1 \\ \cos x, y_1 = r dt \\ \cos x, z_1 = -q dt \end{cases}$$

on trouve de même, et l'on obtient ainsi par des changements de lettres

Convenables les trois autres cosinus

$$\begin{cases} \cos y, x = -r dt \\ \cos y, y = 1 \\ \cos y, z = p dt \\ \cos z, x = q dt \\ \cos z, y = -p dt \\ \cos z, z = 1 \end{cases}$$

Les composantes de la vitesse au moment $t+dt$ suivant les axes ox , oy et oz sont donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{cases} u + du - v r dt + w q dt & \text{pour } ox \\ v + dv - w p dt + u r dt & \text{" } oy \\ w + dw - u q dt + v p dt & \text{" } oz \end{cases}$$

Si, de ces composantes à l'époque $t+dt$, on retranche les composantes à l'époque t , et que l'on divise par dt , et qu'on multiplie par m , on aura les composantes des forces effectives du point m parallèlement à ox , oy et oz . Ce sont

$$\begin{cases} m \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) & \text{pour } ox \\ m \left(\frac{dv}{dt} - wp + ur \right) & \text{" } oy \\ m \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) & \text{" } oz \end{cases}$$

On en déduit immédiatement les moments des forces effectives par rapport à ces trois axes mobiles: car, pour une force dont les composantes sont x , y , z , ces moments sont

$$\begin{cases} zy - yz & \text{pour l'axe } ox \\ xz - zx & \text{" } oy \\ yx - xy & \text{" } oz \end{cases}$$

ainsi, pour tous les points du corps, les trois sommes des moments des forces effectives par rapport aux trois axes mobiles ox , oy et oz seront

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma. m \left\{ y \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) - z \left(\frac{dw}{dt} - wp + ur \right) \right\} \\ \Sigma. m \left\{ z \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) - x \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) \right\} \\ \Sigma. m \left\{ x \left(\frac{dw}{dt} - wp + ur \right) - y \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on appelle L, M, N les sommes Des moments Des forces motrices par rapport aux trois axes mobiles ox, oy, oz , sommes qui doivent être connues en fonction de ψ, φ et θ , on aura pour les trois équations premières Du mouvement Du corps

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma. m \left\{ y \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) - z \left(\frac{dw}{dt} - wp + ur \right) \right\} &= L \\ \Sigma. m \left\{ z \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) - x \left(\frac{dw}{dt} - uq + vp \right) \right\} &= M \\ \Sigma. m \left\{ x \left(\frac{dw}{dt} - wp + ur \right) - y \left(\frac{du}{dt} - vr + wq \right) \right\} &= N \end{aligned} \right.$$

Ces équations se simplifient beaucoup quand on prend pour axes mobiles ox, oy et oz les trois axes principaux D'inertie correspondants au point o . — alors on a, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma. m yz &= 0 \\ \Sigma. m xz &= 0 \\ \Sigma. m xy &= 0 \end{aligned} \right.$$

et de plus, si l'on appelle A, B, C les trois moments D'inertie Du corps par rapport à ces trois axes principaux, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma. m (y^2 + z^2) &= A \\ \Sigma. m (z^2 + x^2) &= B \\ \Sigma. m (x^2 + y^2) &= C \end{aligned} \right.$$

Alors on dira

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma. m (y^2 - x^2) &= A - B \\ \Sigma. m (z^2 - x^2) &= A - C \\ \Sigma. m (z^2 - y^2) &= B - C \end{aligned} \right.$$

Si maintenant, Dans les trois dernières équations, nous posons

Plaçons u, v, w par leurs valeurs, et si nous dérivons en ayant égard aux relations qui expriment que ox, oy et oz sont des axes principaux d'inertie, nous aurons, toutes réductions faites

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr = M \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N \end{cases}$$

Ces trois Equations ne peuvent pas en général s'intégrer séparément. Car L, M et N , en général, contiennent toujours les angles ψ, φ et θ , puisque ce sont les moments des forces motrices par rapport aux axes mobiles ox, oy et oz . — On pourrait cependant les intégrer isolément s'il n'y avait pas de forces motrices; auquel cas les trois sommes L, M et N seraient nulles. —

Je me suis donc maintenant à trouver trois Equations entre les six quantités $\psi, \varphi, \theta, p, q, r$. — c'est ce que l'on peut faire de plusieurs manières, soit par des considérations de Trigonométrie Sphérique, soit par le procédé suivant. — Je vais calculer de deux manières différentes les composantes de la vitesse par rapport au point m parallèlement aux axes fixes ox, oy, oz ; et j'exprimerai que les deux valeurs trouvées pour chaque composante sont égales quel que soit le point m .

Alors, il est facile de trouver les coordonnées x, y, z du point m par rapport aux axes fixes. — En effet, soient

a, a', a''	les cosinus des angles de ox avec les axes fixes,
b, b', b''	" " " oy " "
c, c', c''	" " " oz " "

on aura

$$x = ax + by + cz$$

$$y = a'x + b'y + c'z$$

$$z = a''x + b''y + c''z$$

les neuf cosinus étant des fonctions connues des angles φ, ψ et θ (voir la transf. des coord. dans les préliminaires de la mécan. de Poisson)

Les composantes de la vitesse du point m parallèles aux axes fixes sont donc

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \frac{da}{dt} + y \frac{db}{dt} + z \frac{dc}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = x \frac{da'}{dt} + y \frac{db'}{dt} + z \frac{dc'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} = x \frac{da''}{dt} + y \frac{db''}{dt} + z \frac{dc''}{dt} \end{cases}$$

Ces composantes peuvent se trouver aussi en fonction de p, q, r . En effet, on a trouvé

$$\begin{cases} u = qx - ry \\ v = rx - pz \\ w = py - qx \end{cases}$$

Cela posé, la vitesse du point m parallèle à ox , c'est évidemment $u \cos(x, x) + v \cos(y, x) + w \cos(z, x)$ ou bien $au + bv + cw$. Et de même pour les autres composantes. Donc

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = au + bv + cw \\ \frac{dy}{dt} = a'u + b'v + c'w \\ \frac{dz}{dt} = a''u + b''v + c''w \end{cases}$$

J'aurai donc les équations

$$\begin{cases} au + bv + cw = x \frac{da}{dt} + y \frac{db}{dt} + z \frac{dc}{dt} \\ a'u + b'v + c'w = x \frac{da'}{dt} + y \frac{db'}{dt} + z \frac{dc'}{dt} \\ a''u + b''v + c''w = x \frac{da''}{dt} + y \frac{db''}{dt} + z \frac{dc''}{dt} \end{cases}$$

Équations que, pour plus de commodité, je puis remplacer par trois autres résultant de leur combinaison. — Je remarque en effet que l'on a entre les neuf cosinus les relations

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \end{cases}$$

donc pour ces trois autres - ci

$$\begin{cases} a da + a' da' + a'' da'' = 0 \\ b db + b' db' + b'' db'' = 0 \\ c dc + c' dc' + c'' dc'' = 0 \end{cases}$$

alors, je multiplie respectivement les trois Eq. par a, a', a'' et j'ajoute
 puis, " " " " b, b', b'' "
 enfin " " " " c, c', c'' "

et je remplace ainsi les trois équations par les suivantes

$$\begin{cases} u \text{ ou } qz - ry = y \frac{adb + a'db' + a''db''}{dt} + z \frac{adc + a'dc' + a''dc''}{dt} \\ v \text{ ou } rx - pz = x \frac{bda + b'da' + b''da''}{dt} + z \frac{bdc + b'dc' + b''dc''}{dt} \\ w \text{ ou } py - qx = x \frac{cda + c'da' + c''da''}{dt} + y \frac{cdb + c'db' + c''db''}{dt} \end{cases}$$

Ces trois Equations doivent avoir lieu pour toutes valeurs de x, y, z .

on peut donc dans chacune d'elles évaluer entre eux les deux coefficients d'une même inconnue x, y ou z dans les deux membres. on obtient ainsi les six Equations

$$\begin{cases} p = \frac{cdb + c'db' + c''db''}{dt} = - \frac{bdc + b'dc' + b''dc''}{dt} \\ q = \frac{adc + a'dc' + a''dc''}{dt} = - \frac{cda + c'da' + c''da''}{dt} \\ r = \frac{bda + b'da' + b''da''}{dt} = - \frac{adb + a'db' + a''db''}{dt} \end{cases}$$

Six Equations qui se réduisent en réalité à trois. car les Relations

$$\begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ ca + c'a' + c''a'' = 0 \end{cases} \text{ donnent } \begin{cases} adb + a'db' + a''db'' = -(bda + b'da' + b''da'') \\ bdc + b'dc' + b''dc'' = -(cdb + c'db' + c''db'') \\ cda + c'da' + c''da'' = -(adc + a'dc' + a''dc'') \end{cases}$$

Reste maintenant, pour trouver p, q et r en fonction des trois angles φ, ψ et θ , à remplacer les neuf cosinus par leurs valeurs, et les différentielles de ces cosinus par les différentielles de leurs valeurs. Si l'on fait le calcul, qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \cos \varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \\ q = -\sin \varphi \frac{d\theta}{dt} + \cos \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \\ r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos \theta \frac{d\psi}{dt} \end{array} \right.$$

Equations auxquelles on pourrait arriver plus Rapidement, mais par des méthodes plus longues à exposer.

Ces Equations, avec celles que nous avons déjà écrites, et qui sont

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + (C-B) qr = L \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C) pr = M \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A) pq = N \end{array} \right.$$

Déterminent complètement le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Ces six équations différentielles simultanées sont du premier ordre. Leur intégration amènera six constantes. — Du reste, on ne fait effacer cette intégration que dans des cas particuliers.

Un des cas particuliers les plus importants est celui où le corps n'est sollicité par aucune force. alors les trois dernières Equations deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + (C-B) qr = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C) pr = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A) pq = 0 \end{array} \right.$$

elles ne contiennent point les angles φ, ψ, θ , et elles peuvent s'intégrer séparément.

En ajoutant ces trois Equations après les avoir multipliées respectivement par p, q, r , on obtient

$$\frac{A p dp + B q dq + C r dr}{dt} = 0$$

D'où, en multipliant par dt et intégrant

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

C'est à cette équation que conduirait l'application du principe Des forces vives. — Car, puisqu'il n'y a pas de forces vives, ce principe donne

$$d \sum mv^2 = 0$$

$$\text{ou } \sum mv^2 = h$$

ou

$$\sum m(u^2 + v^2 + w^2) = h$$

ou on a trouvé

$$\begin{cases} u = qz - ry \\ v = rx - pz \\ w = py - qx \end{cases}$$

Remplaçant, et observant que

$$\begin{cases} \sum mxy = 0 \\ \sum myz = 0 \\ \sum mxz = 0 \end{cases}$$

on trouvera

$$p^2 \sum m(y^2 + z^2) + q^2 \sum m(x^2 + z^2) + r^2 \sum m(x^2 + y^2) = h$$

ou

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Une autre intégrale s'obtient en multipliant respectivement les trois équations par Ap , Bq , Cr . Il vient

$$\frac{A^2 p dp + B^2 q dq + C^2 r dr}{dt} = 0$$

D'où

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2$$

Cette équation n'est autre chose que la conséquence du principe Des aires. — En effet : Lorsqu'un corps solide est en mouvement autour d'un point fixe, les vitesses dont tous ses points sont animés à une époque quelconque pourraient être produites à ce moment par des forces instantanées, agissant sur le corps en lignes dans cette position : et toutes ces forces, en vertu du point fixe, seraient équilibrées à un couple. Ce couple est identique avec celui qui résulterait des

quantités de mouvement qui animent les différents points du corps. Si l'on décompose l'un et l'autre de ces couples en trois autres dont les axes soient dirigés suivant trois droites rectangulaires fixes les couples composants seront respectivement les mêmes. — or le principe des axes apprend que, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à trois axes fixes, sont constantes, et donnent par conséquent un moment constant dont l'axe a une direction constante. Les forces instantanées qui produiraient à chaque instant sur le corps en repos, dans la position qu'il occupe à cet instant, les vitesses qui ont lieu, sont donc réductibles à un couple qui a toujours même axe et même moment. Cherchons à déterminer cet axe et ce moment. — Considérons pour cela les quantités de mouvement décomposées à un instant quelconque suivant les axes principaux d'inertie sur lesquels se comptent les x, y, z . — les moments des couples aux quels elles donnent naissance auront pour expressions

$$\sum m(yw - zv) \quad \sum m(zu - xw) \quad \sum m(xv - yu)$$

Substituant les valeurs de u, v, w , on trouvera

$$\begin{cases} \sum m(yw - zv) = Ap \\ \sum m(zu - xw) = Bq \\ \sum m(xv - yu) = Cr \end{cases}$$

Ces quantités ne sont pas constantes, parce que les axes des x, y, z ne sont pas fixes: mais la somme de leurs carrés est constante, puisque le moment résultant est constant. — donc on obtiendra bien l'équation

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2$$

Si, de ces deux équations

$$\begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \\ A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2 \end{cases}$$

on tire p et q en fonction de r , — ce qui est facile et se fait ainsi:

$$\begin{cases} A(A-B)p^2 = k^2 - Bh + C(B-C)r^2 \\ B(A-B)q^2 = Ah - k^2 - C(A-C)r^2 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{k^2 - Bh + C(B-C)r^2}{A(A-B)}} \\ q = \sqrt{\frac{Ah - k^2 - C(A-C)r^2}{B(A-B)}} \end{cases}$$

et si l'on reporte ces valeurs dans la troisième des Equations à intégrer, il vient

$$C \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{[k^2 - Bh + C(B-C)r^2][Ah - k^2 - C(A-C)r^2]}{AB}}$$

Equation différentielle entre r et t qui s'intégrera par une simple quadrature

$$dt = C\sqrt{AB} \frac{dr}{\sqrt{[k^2 - Bh + C(B-C)r^2][Ah - k^2 - C(A-C)r^2]}}$$

r est donc une fonction elliptique de t . — Pour chaque valeur de t , les Tables des fonctions elliptiques donneront r , et par suite p et q .

Les quantités h et k se détermineront d'après la connaissance de l'état initial du corps et des vitesses initiales de ses divers points. En effet, on connaît alors les valeurs initiales des moments Ap , Bq , Cr : — donc on a p_0 , q_0 , r_0 . Ainsi l'on conclut h et k .

Supposons, comme on peut toujours le faire,

$$A > B > C$$

La seconde des Equations qui sont en haut de cette page montre que la quantité $Ah - k^2$ est essentiellement positive

$$Ah - k^2 > 0$$

La quantité $k^2 - Bh$ peut être positive ou négative, suivant les données initiales. Supposons-la aussi positive par exemple.

on aura donc

$$\begin{cases} Ah - k^2 > 0 \\ k^2 - Bh > 0 \end{cases}$$

~~On voit alors que, r variant, p reste toujours positif sans jamais devenir nul : il est minimum et égal à $k^2 - Bh$ quand $r = 0$.~~

~~En même temps, q reste aussi toujours positif, et descend jusqu'à zéro quand r atteint son maximum qui est~~

$$r^2 = \frac{Ah - k^2}{C(A - C)}$$

Donné par la condition que $B(A + B)q^2$ est toujours positif.]
 on voit alors que, r variant, p^2 n'atteint jamais zéro.
 Donc p garde toujours le même signe que p_0 . Il est minimum et égal à $\sqrt{\frac{k^2 - Bh}{A(A - B)}}$ lorsque $r = 0$. — q^2 au contraire peut devenir nul, et par conséquent, q passera par zéro et changera de signe en général quand r passera par son maximum ou son minimum, données sans doute par la condition

$$r^2 < \frac{Ah - k^2}{C(A - C)}$$

ainsi, supposons p_0, q_0, r_0 positifs, et r allant d'abord en croissant. r devient maximum, alors q devient nul. r devient alors, jusqu'à zéro, moment auquel p est minimum q a changé de signe et est négatif. — r devient négatif et atteint son minimum; q repasse par zéro et redevient positif. et ainsi de suite. — p et q oscillent perpétuellement entre deux limites fixes, en passant par 0.

Les valeurs de p, q, r étant connues à chaque instant, on en déduit la vitesse de Rotation Instantanée

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

et les cosinus

$$\frac{p}{\omega} \quad \frac{q}{\omega} \quad \frac{r}{\omega}$$

des angles que fait l'axe Instantané de Rotation avec les trois axes mobiles. —

Peut à un instant à chaque instant la position de ces axes mobiles eux-mêmes. C'est ce qui résulte de l'intégration des trois autres équations différentielles entre t , φ , ψ et θ .

au lieu d'intégrer directement ces trois équations, nous allons nous servir de ce que nous avons déjà trouvé.

Mais d'abord, Remarquons que, jusqu'à présent, les trois axes fixes ont été trois axes rectangulaires quelconques passant par le point o on peut, en les particulierisant, simplifier l'intégration. — Si l'on regarde chaque quantité de mouvement comme une force, et qu'on la transporte à l'origine, il en résulte un couple: et, en composant trois ces couples entre eux, on trouve un couple résultant dont l'axe est constant en grandeur et en direction. — Les couples composants de celui-ci suivant les trois plans principaux mobiles sont

$$Ap \quad Bq \quad Cr$$

Avec les moments des couples composants de ce couple résultant suivant les trois plans fixes Zoy , Zox et Xoy seront

$$aAp + bBq + cCr$$

$$a'Ap + b'Bq + c'Cr$$

$$a''Ap + b''Bq + c''Cr$$

et ces trois moments seront constants. — Si maintenant on prend pour axe des OZ l'axe, comme tout d'abord, du couple résultant des quantités de mouvement, les deux premiers de ces moments seront nuls, et le troisième sera égal au moment K de ce couple résultant lui-même. — Donc on aura

$$aAp + bBq + cCr = 0$$

$$a'Ap + b'Bq + c'Cr = 0$$

$$a''Ap + b''Bq + c''Cr = K$$

C'est de ces trois équations que je vais me servir pour déterminer φ , ψ et θ en fonction de p , q , r . — Cependant je remarque tout d'abord qu'elles ne suffisent pas: car, si l'on ajoute la somme de leurs carrés, on trouve $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$ relation indépendante de φ , ψ et θ . Donc ces trois équations ne

peuvent déterminer que deux de ces trois angles. — Je les multiplie respectivement par a, a', a'' et je les ajoute
 puis " b, b', b'' "
 puis " c, c', c'' "

J'aurais ainsi

$$\begin{cases} Ap = ka'' \\ Bq = kb'' \\ Cr = kc'' \end{cases}$$

Remplaçons a'', b'' et c'' par leurs valeurs qu'on trouve par-
 tout, il vient

$$\begin{cases} Ap = k \sin \varphi \sin \theta \\ Bq = k \cos \varphi \sin \theta \\ Cr = k \cos \theta \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{Cr}{k} \\ \sin \varphi = \frac{Ap}{k \sin \theta} \\ \cos \varphi = \frac{Bq}{k \sin \theta} \end{cases} \quad \text{tg } \varphi = \frac{Ap}{Bq}$$

Reste à trouver l'angle ψ . — Pour cela, on reprend les
 Equations à intégrer

$$\begin{cases} p = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \\ q = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \\ r = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

on ajoute les deux premières après les avoir multipliées respectivement
 par $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$: il vient

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta$$

Remplaçant $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ par leurs valeurs, j'aurais

$$\frac{d\psi}{dt} \sin \theta = \frac{Ap^2 + Bq^2}{k \sin \theta} = \frac{h - Cr^2}{k \sin \theta}$$

$$\text{ou} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Cr^2}{K \sin^2 \theta}$$

$$\text{Mais } \cos \theta = \frac{Cr}{K} \quad \text{donc } \sin^2 \theta = 1 - \frac{C^2 r^2}{K^2} \quad \text{et } K \sin^2 \theta = \frac{K^2 - C^2 r^2}{K}$$

Donc

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{K(h - Cr^2)}{K^2 - C^2 r^2}$$

Si l'on permet maintenant pour dt sa valeur en fonction de r , on aura la valeur de $d\psi$ en fonction de r et dr . L'angle ψ sera donc connu en fonction de r , et par suite de t , par une intégration qui se réduit aux fonctions elliptiques, et pourra être effectuée exactement dans les mêmes cas que celle qui se rapporte à dt .

Le problème, dans le cas particulier qui nous occupe, peut donc être regardé comme complètement résolu au point de vue analytique. on voit qu'il n'y a que six intégrations à faire, tandis que nous avions six équations différentielles et par conséquent six constantes. or nous ne retrouvons que quatre constantes. cela tient au choix particulier que nous avons fait de l'axe OZ lequel a rendus nuls les moments, en général eux-mêmes à une constante quelconque, des couples composants suivant Zx et Zy du couple résultant des quantités de mouvement.

Reste maintenant à expliquer comment on peut se représenter d'une manière plus sensible le mouvement du corps, toujours dans le cas particulier où il n'est sollicité par aucune force.

on sait que si l'on passe sur une droite quelconque menée par l'origine O une longueur égale à $\frac{1}{\sqrt{I}}$, I étant le moment d'inertie du corps par rapport à cette droite, le lieu des extrémités de ces droites est un ellipsoïde dont les axes sont les trois axes principaux d'inertie relatifs au point O , et dont l'équation, rapportée à ces axes, est par conséquent

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

Nous appellerons cet ellipsoïde l'ellipsoïde central du corps dont nous nous occupons: il suffit de déterminer le mouvement

De cet ellipsoïde pour avoir aussi celui du corps, auquel il est
 lié invariablement. — Or cet ellipsoïde joint de la propriété
 remarquable de rester constamment tangent à un plan fixe
 parallèle au plan du couple résultant des quantités de mouvement.
 En effet : et au moment même que cet ellipsoïde en un point
 I dont j'appelle x, y et z les coordonnées : ces coordonnées
 satisfont à la relation

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

Car $p = \omega \cos \alpha = \omega \frac{x}{r}$ d'où $\frac{x}{p} = \frac{r}{\omega} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$. — Maintenant,
 je mène par le point I un plan tangent à l'ellipsoïde. Les
 cosinus de la normale à l'ellipsoïde au point I sont proportion-
 nels aux trois dérivées

$$Ax \quad By \quad Cz$$

Donc ils sont aussi proportionnels aux 3 quantités

$$Ap \quad Bq \quad Cr$$

Ces trois cosinus sont donc

$$\frac{Ap}{K} \quad \frac{Bq}{K} \quad \frac{Cr}{K}$$

Or ce sont justement là les cosinus des angles de l'axe du
 couple résultant avec les axes principaux. ainsi la normale lui-
 même est parallèle à cet axe : donc sa direction est constante.
 Donc le plan tangent au point I reste constamment tangent
 parallèle à un plan fixe, celui du couple résultant. — Mais de
 plus, ce plan tangent est lui-même absolument fixe. Il suffit
 pour le démontrer de faire voir que sa distance au point O est
 fixe. — Soit OH cette distance. L'éq. du plan tangent en I
 est celle-ci

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1$$

et la longueur OH a pour valeur

$$OH = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}$$

Ailleurs, on peut facilement avoir x, y et z au moyen

Les trois Equations

$$\begin{cases} \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \end{cases}$$

Le calcul se fait avec élégance : on a

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{xVA}{pVA} = \frac{yVB}{qVB} = \frac{zVC}{rVC} = \frac{\sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = \frac{p}{\sqrt{h}} \\ y = \frac{q}{\sqrt{h}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{h}} \end{cases}$$

Donc

$$OH = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{\sqrt{h}}{K}$$

Donc cette perpendiculaire est constante. — Donc l'Ellipsoïde central est constamment tangente à un plan absolument fixe, parallèle à celui du couple résultant des quantités de mouvement

En outre, on voit que l'axe instantané est justement la droite menée du centre de l'ellipsoïde à son point de contact avec ce plan fixe. Donc, à chaque instant, pendant le temps infiniment petit dt, l'ellipsoïde ne fait que tourner autour de cet axe instantané qui reste immobile : de façon que l'ellipsoïde roule sur ce plan fixe sans glisser sur lui. — Cela donne une idée complète et claire du mouvement du corps autour du point O

La vitesse angulaire à chaque instant est

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{p}{x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{h} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\omega = \overline{OI} \cdot \sqrt{h}$$

Donc la vitesse angulaire de la rotation instantanée est à chaque instant proportionnelle à la droite menée du centre de l'ellipsoïde à son point de contact avec le plan fixe.



